TRATTATO

DI

ARITMETICA

DI

LUIGI POZZI

Professore di Matematica, Architettio civile e Militare, ec.

IN NAPOLI.
PRESSO I FRATELLI RAIMONDI,

Largo delle Pigne N°. 32.

1832.

L'AUTORE

A CHI LEGGE.

Per utile de' Giovani studiosi desiderava da qualche tempo di dare a stampa un corso di Aritmetica, separata da ogni altro libro, e preparativo in qualche modo all'analisi, di un corso, dove si unisse alla brevità la chiarezza; all'esattezza l'erudizione. Tali sono i lineamenti del piano propostomi. Qualora non siami riuscito di compiere per intero le divisate prerogative, avrò almeno ottenuto, lo spero, di aver ridotto l'Aritmetica ad una forma più acconcia, e più favorevole a' progressi della gioventù, *e particolarmente per quei, che o studiar volessero le varie regole per le diverse* Agenzie, *o iniziarsi nella mercatura. Lo stesso scopo, cioè di facilitare loro la via, e determinarli ad un serio studio delle scienze esatte, spero averlo ottenuto colle mie lezioni di Algebra, anzi pure colla Geometria piana e solida, il che tutto si pubblicherà in breve.*

L'Aritmetica non abbisogna di encomio. Ognun vede che è essa la regolatrice di tutte le cose, e perciò del di lei studio l'importanza è manifesta. Essa regola la Reggia, come il più piccolo abituro, essa in una parola è l'anima di qualunque uomo nella società.

TRATTATO

DI

ARITMETICA.

Definizioni, e principii fondamentali della numerazione.

§. 1. L'*Aritmetica*, considerata o come Scienza, o come Arte pratica, insegna a calcolare esattamente con facilità e prontezza.

§. 2. Le cifre, di cui l'*Aritmetica* fa uso nelle sue operazioni, sono dieci soltanto, ed ecco la loro figura e nome:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.
uno,	due,	tre,	quattro,	cinque,	sei,	sette,	otto,	nove,	zero.

delle quali la prima per se rappresenta l'unità, e ciascuno degli altri nomi sino al nove equivale al numero delle unità, che contiene.

§. 3. Per *unità* s'intende ciascuna cosa, che forma, o che si suppone formare un medesimo tutto, considerato come indiviso nell'atto, e la sua *caratteristica è* 1 *uno* §. 2. *A questa spressione* si aggiunge pe' diversi usi il nome della specie dell'unità, allorchè si vuole indicare qualche sorta di cosa in particolare, come: un-uomo, un-cavallo, un-albero, un ducato, ec.

§. 4. Lo *zero o nulla* di per se niente vale, nè significa mai numero, anzi mancanza di numero, ma posto alla dritta delle altre cifre fa sì che ciascuna delle unità, contenute nella cifra, valga dieci, così: all'uno aggiuntovi uno *zero* in questo modo 10 significa dieci, 20 venti, 30 trenta, 40 quaranta, ec.

§. 5. Lo stesso avviene se una qualunque delle prime nove cifre si ponga alla destra di un'altra, così: all'uno aggiuntovi il 5 in questo modo 15 quindici; 19 diciannove; 35 trentacinque; 48, 86 ec.

§. 6. Il numero è l'aggregato o sia l' unione di più unità. Quindi il numero esprime quante unità si contengono in una *quantità*, vale a dire in tutto ciò che è suscettibile di aumento, o di diminuzione, come: la moneta, i numeri, ec. L' unità per tanto non è numero, ma principio di numero, e di qualunque numerazione. E siccome si può sempre aggiungere ad un numero l'*unità*, e farne uno maggiore, così è evidente essere la serie de' numeri illimitata. Nè tampoco lo zero è numero, giacchè due unità cominciano a far numero, perciò i veri numeri, composti di più unità, sono soltanto otto, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

§. 7. I numeri, altri son detti della medesima specie, perchè comprendono una sola sorta di unità, come: *sei ducati*, *venti ducati*, *cento ducati ec.* ed altri di specie diversa, contenendo fra loro unità di sorta differente, come: 10 *uomini*, 30 *ducati*, 40 *canne*; ma questa sorta si può bensì calcolare, nel caso che la loro unità minore si possa prendere per unità dell' altra maggiore, tali sono: 10 *ducati*, 6 *grani*, 8 *cavalli*; come: 20 *canne*; 6 *palmi*; 10 *once*, *ec.*

§. 8. I numeri sono altresì *intieri*, e *rotti*: sono *intieri* quelli che costano di unità, come: *un ducato*, *cinque ducati*, *ec.* e *rotti* quelli, che rappresentano parte dell' *unità*, come: *un terzo*, *un quarto*, un *decimo di ducato*, ec.

§. 9. Si distingue ancora i numeri in *astratti*, e *concreti*. Numero astratto dicesi quello, che si annunzia senza indicare la specie della sua unità, come 1, 10, 30; 2 volte, 8 volte, ec. Concreto quando si annunzia, come 10 *uomini*, *sei case*, e dinota per conseguente una specie particolare formata dall' unione di più cose.

§. 10. Le cifre sino al nove son dette semplici per essere scritte con una sola cifra; dal nove impoi composte, essendo scritte con più cifre, così dal dieci fino al cento son scritte con due cifre. Dal cento fino al mille con tre. Dal mille fino al dieci mille con quattro. Dal dieci mille fino al cento mille con cinque, ec.

§. 11. L' *unità* poi è quel principio o quell' elemento dalla cui successiva ripetizione o aggiunzione a se medesima si forma la pluralità, così dicendo la parola *casa*, s' intenderebbe no-

minar quel principio o quell' elemento, che replicato più volte forma una Città, la quale in sostanza è una pluralità di case.

§. 12. Questa ripetizione si può continuare senza limitazione veruna, giacchè esistono tante pluralità, quanti sono gli oggetti, che possono presentarsi ai nostri occhi.

§. 13. Per distinguere l'una dall'altra queste infinite, e possibili pluralità fu trovato il numero, cioè un segno speciale, che rappresenta ed esprime tutte le possibili pluralità; e mirabile è l' idea concepita in questa invenzione di variare il valore di una figura col metterla in diversi luoghi, il che chiamasi l' arte della *Numerazione*, che comprende il modo di rappresentare e di pronunziare il valore de' numeri.

§. 14. Tutte le possibili pluralità, ovvero tutti i numeri possibili enunciare si può colla semplice combinazione delle sole dieci cifre primitive, metodo in vero quanto utile, altrettanto ingegnoso, ed ecco come: dopo di aver indicato con la cifra 9 la collezione di nove unità, si avrà una pluralità, composta di nove ed una unità o sia di dieci unità, scrivendo la cifra 1, che denota l' unità semplice, ed a sua destra lo *zero*, così 10. Or se al 10 si aggiunga l' unità, si avrà dieci ed uno ossia undici unità; se all' 11 si aggiunga l' unità si avrà undici ed uno, o vero dodici unità, indi tredici, quattordici, quindici, sedici sino al diciannove inclusivamente. Aggiungendo al 19 un' unità, si avrà venti unità o due decine, che si esprime con lo scrivere il 2 ed alla sua destra lo *zero*, così 20 venti. Sostituendo a questa apressione le prime nove cifre si avrà tutti i numeri corrispondenti a tutte le pluralità, che seguono dopo il 20 fino al 29 inclusivamente, cioè ventuno, ventidue, ec. e in simil guisa procedendo si otterrà tutte le pluralità sino al novantanove, il maggior numero composto di decine e di unità, che sarà espresso da 99. Or se al 99 si aggiunga l' unità si avrà dieci decine o una decina di decine, che si chiama *centinajo o cento* e si figura così 100. Operando in simil guisa si avrà le spressioni di tutte le pluralità da cento fino a novecento novantanove, che sarà designato da 999. Se a questo aggiungasi l' unità si avrà dieci centinaja, cioè una decina di centinaja o *mille*, che scrivesi 1000, così due mila, tre mila, quattro mila, ec. sino a nove mila novecento novanta

nove. Dopo questo numero si ha la decina di migliaja o dieci-mila, così ventimila, trentamila ec. sino a novanta nove mila novecento novantanove. Se a questo numero si aggiunga l'unità si otterrà un numero eguale a dieci volte dieci mila, o cento mille. Con dieci cento mille si compone l'unità del milione, e così procedendo si forma i bilioni, i trilioni, ec. Fassi da tutto questo apertamente manifesto potersi esprimere tutti i numeri con pochissimi caratteri, o cifre.

§. 15. Si è veduto come si rappresenta i caratteri o cifre, e osservato si è non esservi bisogno di altre per esprimere tutte le possibili pluralità, giacchè se riflettasi che ogni unità di ordine superiore è eguale a dieci unità dell' ordine inferiore o sia che ogni decina vale dieci unità semplici, ogni centinaio dieci decine, ogni migliaio dieci centinaia ec. si scorgerà tutto d'un tratto che ogni cifra diviene dieci volte più grande se occupi il secondo luogo dalla dritta verso la sinistra di chi legge, cento volte più grande se occupi il terzo luogo, mille volte se occupi il quarto, ed al contrario ec. e che, cominciando dal primo numero a destra e andando verso la sinistra, dopo ogni tre numeri si rinnova lo stesso ordine di unità, decine, centinaia; se non che le prime sono unità, decine e centinaia semplici, le seconde unità, decine, centinaia di migliaia, ec. e così potersi rappresentare i numeri composti con le istesse cifre, con le quali si rappresenta i numeri semplici, o sia quelli di valore assoluto, lasciando ai composti quello di relativo. Ciò messo; volendo enunciare il numero 3658 e saperne il valore, si osservi che la cifra 8, che è prima, cominciando da destra, a un numero semplice esprimente otto unità, che la cifra 5 che segue dopo l'8 esprime cinque decine o 50 rispetto all' 8. La susseguente cifra 6 dinota centinaia o seicento rispetto al 5, e l'ultima cifra 3 esprime migliaia o tre mila rispetto al 6, onde riassumendo il valor di questi numeri, ma da sinistra verso dritta, si conoscerà che l'indicato numero 3658 vuol significare: *tremila seicento cinquantotto unità*.

§. 16. Or non sarà più difficile il leggere un numero, che si trovi scritto, e scriverlo se venga pronunciato, qualora si conosca il valore, che ha ogni carattere da se solo, e 'l valore, che acquista variando di luogo, sol che si noti per iscriverlo

quante cifre si debbe adoperare, e quante tra quelle siano significative, giacchè per esprimer cento, come si disse, ve ne vogliono tre, per mille quattro, per dieci mila cinque, per un milione sette, ec. e mancando o le unità, o le decine, o le centinaia, ec. porre ne' respettivi luoghi lo zero, onde dare a ciascuna cifra il valore, che per ragion di luogo le spetta, p. c. le decine in mancanza delle unità avranno alla loro dritta uno *zero*; le centinaia *due*, le migliaia tre, ec. così per iscrivere venti mila duecento cinque, si deve avere cinque cifre, tre significative e due *zeri*, e sarà rappresentato in questo modo: 20205. Per iscrivere *ottantotto* milioni quaranta mila ventiquattro si deve avere otto cifre, cinque significative e tre zeri, e sarà espresso così: 88040024.

§. 17. È cosa utile ancora l'aggiunger qui la nomenclatura spettante a certi complessi di unità, riunendo in questo modo quanto appartiene all' enunciazione e scrittura de' numeri. Egli è da sapersi che da' medesimi principii ne segue la maniera di enunciare un numero composto di quante cifre si voglia. Per facilitare questa enunciazione si divide il numero proposto, andando da destra a sinistra in classi, composta ciascheduna di tre cifre, potendo esser l'ultima classe a sinistra di due, ed anche di una sola cifra. La prima classe a destra si chiama la *classe* delle *unità*, e contiene delle unità, delle decine di unità, delle centinaia di unità. La seconda dicesi la *classe* delle *migliaia*, e comprende delle unità di migliaia, delle decine di migliaia, e delle centinaia di migliaia. La terza si appella la *classe* de' *milioni*, e contiene delle unità di milioni, delle decine di milioni, delle centinaia di milioni. La quarta è la *classe* delle *migliaia di milioni* e comprende delle unità, delle decine, delle centinaia di migliaia di milioni. La quinta è la *classe* de' *bilioni*, ec. Ciò messo si enuncia le classi, andando da sinistra a destra, come se ciascuna fosse sola, ma alla fine di ciascuna enumerazione pronunciar si deve il nome delle unità della classe, p. c. sia da enunciare il numero seguente; 58973215803 46, si scriva prima come si disse:

5. classe.	4. classe.	3. classe.	2. classe.	1. classe.
5.	897.	321.	580.	346.
bilioni.	migliaia di milioni.	milioni.	migliaia.	unità.

E si profferirà: cinque bilioni, ottocento novantasette mila, trecento ventuno milioni, cinque cento ottanta mila, trecento quarantasei unità.

Nella pratica è sufficiente il separare le classi le une dalle altre per mezzo di virgole.

§. 18. Conosciute e parlate le cifre arabiche, delle quali si fa uso presentemente per descrivere ogni quantità numerica, è cosa opportuna l'esporre ancora l'antica numerazione *Romana* o *Latina*, di cui servesi soltanto oggidì per le iscrizioni lapidari.

I.	uno.	XI.	undici.	XL.	quaranta.
II.	due.	XII.	dodici.	L.	cinquanta.
III.	tre.	XIII.	tredici.	C.	cento.
IV.	quattro.	XIV.	quattordici.	CC.	duecento.
V.	cinque.	XV.	quindici.	CCC.	trecento.
VI.	sei.	XVI.	sedici.	CCCC.	quattro cento.
VII.	sette.	XVII.	diciassette.	D. o IↃ	cinque cento.
VIII.	otto.	XVIII.	diciotto.	M. o CIↃ	mille.
IX.	nove.	XIX.	diciannove.		
X.	dieci.	XX.	venti.		

Di tutte le lettere dell'Alfabeto, di cui si servivano i Romani, dando loro un valore particolare, non si fa uso al presente che delle sette seguenti:

uno.	cinque.	dieci.	cinquanta.	cento.	cinquecento.	mille
I.	V.	X.	L.	C.	D.	M.

Si noti per l'uso di queste lettere che una di minor significazione posta alla sinistra di un'altra, toglie a questa tante unità, quante essa ne significa, così:

quattro.	quaranta.	novantanove.	novecento
IV.	XL.	IC.	CM.

Al contrario l'accresce posta alla dritta XI. (undici) LX. (sessanta) ec.

E finalmente queste lettere valgono mille volte il loro valore quando hanno una linea sopra di loro, come: $\overline{V}$ e così delle altre.

Assiomi.

1. Il tutto è maggiore della sua parte.
2. Tutte le parti prese insieme formano il tutto.
3. Se da un tutto si tolgono tutte le parti non deve rimanere più nulla.
4. Se due quantità sono eguali tra loro multiplicate o divise per lo stesso numero, il di loro prodotto, ed il di loro quoto saranno eguali eziandio.

Delle operazioni principali, e de' metodi ausiliari.

§. 19. Un numero qualunque non si può che ingrandire o impiccolire, p. e. dato il numero 5 si può farlo divenir 6 aggiungendogli *uno*, o ridurlo a 4 togliendogli *uno* e niente più. Da ciò fassi apertamente manifesto che le operazioni principali e fondamentali da eseguirsi sui numeri sono due soltanto, una li aumenta, l'altra li diminuisce, la prima si chiama *Addizione*, l'altra *Sottrazione*, dalle quali pende tutto il *magistero* della risoluzione di ogni quistione, che riguardi i numeri, oggetto dell'Aritmetica. Per ciascuna delle operazioni vi ha un metodo ausiliario utile, quanto breve; la *multiplica* la è dell'Addizione, la Divisione della *Sottrazione*. Tutto pertanto riducesi a comporre i numeri, ed a scomporli in più parti.

§. 20. Sì l'una che l'altra delle due operazioni principali, e de' metodi ausiliari non può aver luogo nella pratica che su i numeri, i quali solo contengono unità della medesima specie detti *incomplessi*, o che composti sono di unità di differente sorta, riducibili però alla stessa specie, nomati *complessi*, ed anche *specifici* o sia di diverso nome, il che si parlò, §. 7, ma non già su i numeri, la di cui unità non può prendersi per unità dell'altra maggiore, il che pure si avvertì.

La ragione si è che non possono esistere relazioni che tra quantità della medesima natura.

Si tratta quì primamente de' numeri *incomplessi*; secondamente de' *complessi*.

Addizione de' numeri incomplessi

Prima operazione principale.

§. 21. *Addizionare* vuol dire aggiungere insieme più numeri della medesima specie per formarne uno solo. Al numero, che risulta, si dà il nome di *Somma o Tutto*.

§. 22. Ogni numero espresso da una sola cifra si aggiunge ad un altro qualunque, giusta i principii della numerazione, p. e. se col numero 12 si voglia addizionare il numero 6 si osservi che ciascun delle unità del 6 essendo aggiunta successivamente al 12 ne risulta il 18. Nello stesso modo se debbasi aggiungere 8 al numero 120 si scorgerà che questo numero essendo aumentato di otto unità diviene 128. Si apprenderà così in poco tempo addizionare col sussidio della memoria ciascun de' numeri semplici con un altro numero espresso da quante cifre si voglia.

§. 23. Per addizionare più numeri della medesima specie, espressi ciascuno da più cifre, si deve scriverli uno sotto l'altro badando di collocare nella stessa colonna verticale le unità dello stesso ordine, vale a dire le unità semplici sotto le semplici unità; le decine sotto le decine; le centinaia sotto le centinaia, le migliaia ec. Indi tirata sotto una linea orizzontale, aggiungere insieme successivamente tutte le unità della prima colonna a destra, se queste sono minori di dieci, si segna ciò che è sotto la colonna delle unità; se sono dieci, si nota *zero*, e si ritiene una decina da aggiungersi a quelle della colonna appresso; e se le unità fossero più di dieci, si scrive tutto quello, che eccede, ritenendo una o più decine, se vi sono, per aggiungerle alla colonna seguente; e così si oprerà seguitando per la colonna delle decine, delle centinaia, migliaia, ec. Egli è chiaro che il numero scritto al di sotto della linea risulta da tutte le operazioni indicate, ed è la somma reale, poichè esso è l'aggregato delle unità, delle decine,

delle centinaia, migliaia, ec., che compongono i numeri, o sia sono le parti riunite, che formano il tutto, che si doveva addizionare.

Esempio.

```
   7 6 4 3
   2 8 9 6
 ---------
 1 0,5 3 9 — Somma.
```

E poichè le unità della prima colonna a destra sono 6 più 3 il che fa nove si scrive 9 sotto la linea e sotto la prima colonna. L'aggregato delle decine della seconda colonna cioè 9 più 4 essendo eguale a 13, si scrive 3 sotto la colonna delle decine, e si ritiene un centinaio per la colonna seguente delle centinaia. Si procede, e si dice, uno di retenuto più 6 fanno 7., e 8 fanno 15, si nota 5 sotto la colonna delle centinaia, e si ritiene un migliaio per la colonna delle migliaia. Si continua, e si dice, uno di ritenuto e 2 fanno 3 e 7 fanno 10 che si nota, mettendo lo zero sotto la colonna delle migliaia, e la cifra 1 al luogo delle decine di migliaia. Le operazioni sono ultimate, e si è ottenuto 10,539 per somma o tutto de' numeri addizionati.

§. 24. Ma se la collezione delle unità della prima colonna sorpassa 9, cioè se è composta di decine e di unità, conviene in tal caso, come si cennò, scrivere le unità sotto la propria colonna, e ritenere il numero delle decine risultanti dall' addizione di tutta la colonna per aggiungerle alla colonna seguente, come:

Esempio.

```
   8 4 9
   5 6 7
   4 3 8
 -------
 1,8 5 4
```

E come che 8 più 7, più 9 fanno 24, e 24 contiene due decine e quattro unità, si scrive le quattro unità sotto la propria colonna, ritenendo le due decine da aggiungersi alla colonna seguente, ec. E fatte tutte le addizioni particolari, come sopra, si troverà esser la somma de' numeri proposti 1854.

§. 25. Alle volte può accadere nell'addizionare i numeri che il risultamento di una o più colonne abbia per prima cifra *zero*, o che la prima colonna sia tutta composta di *zeri*; in ambidue i casi si opera, come si cennò, e come si rileva da' due seguenti esempi:

Esempio 1.

```
5 2 3 4
  7 6 9
    9 7
-------
6, 1 0 0 — Somma
```

Poichè 4 più 9 più 7 fanno 20 e questo numero ha per prima cifra *zero*, si nota *zero* sotto la prima colonna, dovendo lo zero riempire la mancanza di una denominazione, il che si parlò, e si ritiene due decine da aggiungere alla colonna seguente, alle quali unite le 3, le 6, le 9 decine di detta colonna fanno 20, che pure ha per prima cifra *zero*, e perciò scriver si deve *zero* sotto la seconda colonna, e ritenere due centinaia da aggiungersi alla colonna, che segue, ec. e proseguita l'operazione, si avrà per somma 6,100.

Esempio 2.

```
5 3 6 0
  2 3 0
    2 0
-------
5, 6 1 0 — Somma
```

Come nella prima colonna non vi sono che *zeri*, si deve

segnare *zero* sotto di essa, e passare ad addizionare le altre colonne, e si troverà esser la somma 5,610.

§. 26. Per assicurarsi di non aver errato nell'addizionare, si farà la pruova come si rileva dall'esempio seguente. La stessa operazione può estendersi egualmente su di ogni altro numero.

Esempio di pruova 5 4 3 2
7 6 5 3
——— linea separante.
3 5 6 4
———
1 6, 6 4 9 Somma totale.

1 3, 0 8 5 Somma delle due prime fila de' numeri superiori.
3, 5 6 4 Numeri della terza fila.
———
1 6, 6 4 9 Somma totale eguale alla superiore.

Spiegazione della pruova dell' addizione.

Fatta l' addizione delle tre prime fila de' numeri dati, si avrà per somma totale 16,649. Si tiri poi una linea, che separi due delle tre fila, e si addizioni le due, da cui si otterrà per somma 13,085, come vedesi; sotto di questa somma si scriva i numeri della terza fila, e fatta l' addizione tanto della somma ottenuta dalle due fila che della terza fila posta sotto, si dovrà aver di nuovo un numero eguale al precedente, come 16,649, il che fa conoscere che non si è errato.

Sottrazione de' numeri incomplessi

seconda operazione principale

§. 27. *Sottrarre* significa togliere, scemare. È perciò che la *sottrazione* consiste nel togliere un numero minore da uno maggiore della stessa specie o sia trovare la differenza tra due numeri disuguali, la quale è composta dalle differenze particolari, che risultano dalla successiva sottrazione de' numeri, che dinotano le diverse unità del numero minore da' numeri, che disegnano li diversi ordini di unità del numero maggiore.

§. 28. Il numero da cui si sottra il minore, e che rimane necessariamente diminuito dopo l'operazione, si chiama *minuendo* o numero maggiore.

§. 29. Il numero, che si sottra dal maggiore, essendo quello, che produce la diminuzione dicesi *minutore* o numero minore. Ciò che risulta dall'operazione, che è quella parte, che rimane al minuendo, dopo che gli è stato tolto il minutore, appellasi *residuo* o *differenza*; così chi da 10 toglie 4 il residuo è 6 realmente; 10 poi differisce da 4 di 6.

§. 30. La sottrazione de' numeri semplici non abbisogna di regole: sono sufficienti i principii della numerazione, così la differenza di 9 e 2 è 7; di 5 e 3 è 2 ec. Si ha ancora bisogno di saper sottrarre un numero semplice da un altro minore di 20, p. e., 11 da 17; 2 da 15, ec. e ciò si fa col solo ajuto della memoria.

§. 31. Trattandosi di eseguire la sottrazione su i numeri composti o sia trovare la differenza tra due numeri espressi da molte cifre, si scriva il maggior de' due numeri il primo, ed il minore sotto, in modo che le unità della medesima specie si corrispondano, e tiratavi una linea, si sottragga successivamente da destra a sinistra, cominciando dalle unità, ciascheduna cifra inferiore dalla superiore, che le corrisponde, e si noti sotto la linea i residui, che si trova.

§. 32. Può accadere nel fare le sottrazioni parziali che qualche cifra inferiore sia eguale alla superiore, o che la superi; nel primo caso si deve porre zero al residuo; nel secondo si aumenterà la cifra, che sta sopra di una decina, che si prenderà ad imprestito dalla cifra, che succede immediatamente a sinistra, ponendo sopra di essa un punto per ricordo, affine di diminuirla di un'unità, allorchè si passerà ad operare sopra la colonna appresso.

Fatte tutte queste operazioni, il numero, che si otterrà scritto sotto la linea, denoterà la differenza de' due numeri proposti, perchè conterrà il risultato delle differenze de' due numeri proposti, il che meglio fassi manifesto per gli esempli.

Esempio 1.

4,7 3 2 — minuendo.
  4 2 2 — minutore.

4,3 1 0 residuo o differenza.

Scritti i numeri come quì si osserva, si cominci dal sottrarre le unità inferiori dalle superiori con dire, 2 tolto da 2 rimane *zero*, che si scrive sotto la linea e nella colonna delle unità. Nello stesso modo si sottrae le decine dalle decine dicendo 2 levato da 3 rimane 1, che si nota sotto la colonna delle decine. Si passa a sottrarre le centinaia dalle centinaia, e si dice 4 tolto da 7 rimane 3, che pure si scrive sotto la colonna delle centinaia. E finalmente, siccome non vi sono migliaia nel numero inferiore, i quattro mille del numero superiore restano senza diminuzione, e perciò la cifra 4 si scrive sotto la linea. Dunque la differenza de' due numeri proposti, o sia il residuo della sottrazione è 4,310.

Esempio 2.

7,8 4 3 minuendo.
5,9 3 4 minutore.

1,9 0 9 residuo.

Come che non è possibile togliere 4 da 3, si prende dalla cifra 4 a sinistra delle decine un' unità di decina, che unita al 3 si ha 13, da cui sottraendo 4 rimane 9, che si scrive sotto la linea nel primo luogo. Si prosiegue, ma osservando che la cifra 4 deve essere diminuita di una unità, si leva soltanto 3 da 3, il che dà *zero* per resto, che scrivesi sotto le decine. Passando alla colonna delle centinaia, si dice 9 dovrebbe esser tolto da 8, ma ciò non potendo farsi, si prende

dal 7 un migliaio o una decina di centinaia, ed allora si ha 18 da cui sottratto 9 si ha per residuo 9, che si scrive sotto la colonna delle centinaia. Finalmente alla colonna delle migliaia la cifra 7 non devesi valutare che per 6, e perciò togliendo 5 da 6 rimane 1, che si nota sotto le migliaia. Il residuo adunque de' due numeri proposti è 1,909.

In luogo di diminuire di un' unità la cifra superiore, dalla quale si è fatto l' imprestito, si può aumentare l' inferiore di un' unità, il che torna lo stesso.

§. 33. Se la cifra dalla quale si deve prendere un' unità ad imprestito è uno *zero*, l' imprestito si farà sopra la prima cifra significativa, che sarà a sinistra, e ciascuno degli *zeri* sino a detta cifra si conterà per 9, dovendo poi diminuire la cifra, allorchè si oprerà su di essa, come per l'esempio:

9 9	
3 4 0 0 0	minuendo.
2 4 5 6	minutore.
3 1,5 4 4	residuo.

Non potendo 6 esser sottratto da *zero*, si prende una decina dalla prima cifra significativa 4. Questa cifra denota migliaia o sia delle centinaia di decina, perciò dopo di aver preso una decina, rimanendone 99, si deve collocare il 99 sopra gli altri due *zeri*, che seguono a sinistra dopo il primo zero. Or si dica 6 levato da 10 rimane 4, che si scrive nel primo luogo. Alla seconda colonna deve dirsi 5 tolto da 9 rimane 4, che pure si nota. Alla terza colonna si dice parimenti 4 levato da 9 rimane 5, che scrivesi. Alla quarta colonna devesi dire 2 tolto da 3, dovendo essere la cifra 4 diminuita, resta 1, che si nota. E finalmente alla quinta colonna si scrive il 3 non essendovi cifra inferiore. Il residuo pertanto della sottrazione è 31,544.

Pruova della Sottrazione.

§. 34. È chiaro da quanto si è detto che il residuo della sottrazione altro non è che la differenza tra il minutore, e 'l minuendo, perciò aggiunto al residuo il minutore, o parte sottratta ed addizionati insieme, si avrà in tal modo di nuovo il minuendo o tutto, poichè il tutto è eguale alle sue parti insieme prese, ed in questo caso la sottrazione sarà esatta.

Così fatta la sottrazione e trovato che dal numero . . 8 7 6 5
Levando il numero 6 5 4

Il residuo è 8, 1 1 1
Aggiunto il minutore 6 5 4

Trovo che la somma è 8, 7 6 5
Dico che la sottrazione è esatta.

Due metodi ausiliari delle precedenti operazioni, cioè la multiplica, e la divisione.

Assioma.

Una quantità multiplicata per un numero, o pei fattori di questo numero dà il medesimo prodotto, così: (1) $7 \times 12 = 84$; $7 \times 2 \times 6 = 84$

Multiplica de' numeri incomplessi.
metodo ausiliario dell' Addizione.

§. 35. Multiplicare altro non dice che ripetere, replicare un numero più volte; o vero prendere il numero da moltiplicarsi tante volte, quante il numero multiplicante contiene l'unità. Di fatti 6 multiplicato per 4 è lo stesso che prendere il

(1) *Vale multiplicato per*

6 quattro volte, giacchè equivale al numero 24, il quale contiene tante volte il 6 per quante unità sono nel 4.

§. 36. In ogni multiplicazione proposta ad eseguirsi si distingue due numeri; l'uno maggiore, minore l'altro. Il maggiore chiamasi *multiplicando*, poichè deve essere ripetuto, replicato; il minore *multiplicatore* per la ragione che ripete, replica il *multiplicando*, ed entrambi hanno pure il nome di fattori. Ciò che risulta da ciascuna operazione dicesi prodotto, il quale contiene tante volte il numero maggiore o *multiplicando* per quante unità si contengono nel *multiplicatore*. E se vi saranno più moltiplicatori, e per conseguenza più prodotti, si chiamerà questi prodotti *parziali*, e la somma di tutti questi prodotti, *prodotto totale*.

§. 37. Egli è chiaro che la moltiplica non è altro che una mera addizione, poichè per multiplicare 25 per 5, fa d'uopo ripetere 25 cinque volte o sia per 5, perchè il multiplicatore 5 contiene cinque volte l'unità. Ne segue da ciò che il risultato della multiplica è lo stesso come se si aggiungesse 25 quattro volte a se stesso, come vedesi. . . . 25

$$\begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ \hline 125 \end{array}$$

Ma l'addizione diverrebbe assai lunga ne' casi, ove il multiplicatore fosse un numero composto di molte unità, perciò per abbreviare si ricorre al metodo ausiliario della multiplica, il quale in questo caso dice soltanto: cinque volte 25 fanno 125.

§. 38. Lo *zero* multiplicato per qualunque numero non dà mai verun prodotto.

§. 39. Talvolta l'unità è d'essa il multiplicatore, ma allora non vi è multiplicazione reale; perchè l'unità multiplicata per se stessa non da più di un'unità; multiplicata poi per

un altro numero dà quel medesimo numero per prodotto, ed in tal caso il multiplicando non soffre alterazione veruna, giacchè non è per niente replicato; ma se il multiplicatore superi l' unità, allora vi è vera multiplicazione.

§. 40. Se i due fattori della multiplica sono espressi ciascuno da una sola cifra, ciò si fa coll' addizione, o sia aggiungendo uno di questi numeri a se stesso tante volte per quante unità sono nell' altro, o per mezzo della tavola seguente costruita, secondo i principii dell' addizione.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.

In questa tavola sono scritti nelle nove caselle in fronte di essa, e nelle altre nove, che sono nel lato verticale a sinistra tutti i numeri, cominciando dal 1 fino al 9, e nelle caselle, formata ciascuna dall' intersezione di due linee, una verticale e l' altra orizzontale, è notato il prodotto de' due numeri corrispondenti alle due caselle, così p. e. il prodotto di 8 multiplicato per 5 è 40; di 7 multiplicato per 7 è 49; di 9 per 9 è 81. ec. Sarebbe facile il continuare questa tavola; ma non

dovendo servir qui che per multiplicare due numeri semplici l'uno per l'altro, è inutile il portarla più oltre.

§. 41. Dovendo multiplicare un numero composto per uno semplice, come 4,532 per 9, si dispongano i due fattori come si vede:

4,5 3 2	multiplicando.
9	multiplicatore.
4,0 7 8 8	prodotto totale.

Indi si prenda le due unità del multiplicando nove volte, le quali fanno 18, cioè una decina e otto unità, si scriva le 8 unità al proprio luogo, ritenendo la decina per aggiungerla al prodotto delle tre decine del multiplicando, che prese nove volte fanno 27, e con la ritenuta ventotto decine, o sia due centinaia e otto decine, si noti le otto decine al suo luogo e si ritenga le due centinaia; e passando alle centinaia, come cinque volte nove fanno 45 e due di ritenuto 47. centinaia, si scriva 7. al luogo delle centinaia, e si ritenga le 4 migliaia. Finalmente, si dica quattro volte 9 fanno 36 e quattro mille ritenuti fanno 40 migliaia, che per non esservi altri numeri si segna tutto il 40. L'operazione è compiuta, ed il prodotto totale è 40,788.

§. 42. Si debba multiplicare il numero 3,004 per 8.

3,0 0 4	multiplicando.
8	multiplicatore.
2 4,0 3 2	prodotto totale.

Si dica primamente quattro volte 8 fanno 32, si scriva le due unità, e si ritenga le tre decine. Si dica poi otto volte *zero* non dà che *zero*, si noti perciò le sole tre decine ritenute al luogo delle decine. Si dica di nuovo otto volte *zero* non dà che zero, si scriva dunque *zero* al luogo delle centi-

naia. E finalmente tre volte 8 fanno 24; scrivasi questo intiero al suo luogo. L'operazione è terminata, ed il prodotto è di 24,032.

§. 43. Ne' casi precedenti il multiplicando era un numero composto, ed il multiplicatore un numero semplice, siano ora ambidue composti.

3,4 2 7	multiplicando.
2 4	multiplicatore.
1 3.7 0 8	primo prodotto) parziale.
6 8 5 4	secondo prodotto)
8 2, 2 4 8	prodotto totale.

Si è sopra osservato che multiplicare un numero per un altro vuol dire ripetere il primo tante volte, quante sono le unità del secondo; perciò in questo caso si dovrà ripetere o sia multiplicare il multiplicando 3,427 ventiquattro volte, cioè per 4 e per 2. Si multiplichi prima per 4, seguendo la regola data, ed il prodotto parziale 13,708 si noti al suo luogo. Si passi a multiplicare il 3,427 per 2, ed il prodotto parziale si scriva al suo luogo. Il multiplicatore non ha più cifre, per conseguente non si può aver più prodotti. Addizionati dunque i due prodotti parziali, si avrà per prodotto totale 82,248, come vedesi nell'esemplo.

Si noti che in questo caso e simili che il prodotto totale è composto di tanti prodotti parziali, quante sono le cifre del multiplicatore; che ogni prodotto parziale contiene unità della medesima specie del multiplicatore da cui è derivato, così il primo unità, il secondo decine ec.

§. 44. La multiplicazione del numero 34,27 per 4 si chiama ad una figura, per 2 dicesi per decine; perciò il primo numero, che risulta dalla multiplicazione delle decine, deve mettersi sotto la seconda figura, e se il multiplicatore avesse un' altra cifra, si direbbe per centinaia, ec. ed allora il primo

numero metter si dovrebbe sotto la terza figura del multiplicatore, e così di seguito.

§. 45. La multiplicazione può rendersi più breve allorchè il multiplicatore può scomporsi in due o più fattori. Si trovi dapprima il prodotto del multiplicando per uno de' fattori, indi si multiplichi un tale prodotto per l' altro fattore, e così si prosegua, ec. Volendo pertanto fare in questo modo la multiplica del numero 3,427 per 24 dell' esempio sopra, si scomponga il 24 ne' due fattori 4 e 6. Si multiplichi prima per 4, ed il prodotto per 6, e si troverà essere il prodotto totale eguale a quello del §. 43 come, per l' esempio.

3,4 2 7	multiplicando.
4	primo multiplicatore.
1 3,7 0 8	
6	secondo multiplicatore.
8 2,2 4 8	prodotto totale, che eguaglia l' altro.

§. 46. Sia da multiplicarsi il numero 3045, per 2004, si disponga i numeri come per l' esempio, e si esegua le multipliche.

3 0 4 5	multiplicando.	
2 0 0 4	multiplicatore.	
1 2 1 8 0	primo prodotto.	parziale.
0 0 0 0	secondo prodotto.	
0 0 0 0	terzo prodotto.	
6 0 9 0	quarto prodotto.	
6,1 0 2,1 8 0	prodotto totale.	

§. 47. Nella pratica si sopprime i zeri tralasciando di fare i rispettivi prodotti, passando subito all' altro, ma si deve

fare attenzione di scalare tante figure scrivendo tal prodotto, quante fila di zeri si sono soppresse, così l' operazione diverrebbe la seguente :

```
     3 0 4 5   multiplicando.
     2 0 0 4   multiplicatore.
    ———————
   1 2 1 8 0
 6 0 9 0
 ———————————
 6,1 0 2,1 8 0  prodotto totale.
```

§. 48. Vogliasi ottenere il prodotto di un numero da multiplicare per 10, è sufficiente aggiungere uno zero alla dritta di tal numero; ed in questo modo diverrà dieci volte maggiore, in ciascheduna delle sue parti; così si debba multiplicare 360 per 10, il suo prodotto sarà 3600. Dunque volendo ottenere il prodotto di un numero da multiplicare per 20 si multiplicherà prima per due, come si è detto sopra, indi si aggiungerà al suo prodotto uno zero; e se per 200 due zeri, per 300 tre zeri, ec.

§. 49. Si debba multiplicare 45,728 per 5,400. Si multiplichi prima per 54 e si otterrà un prodotto cento volte maggiore scrivendo due zeri alla sua destra con che le sue unità divengono centinaia, le sue decine, decine di centinaia, ec. Si esegua la moltiplica col solo 54.

```
      4 5,7 2 8   multiplicando.
            5 4   multiplicatore.
 ———————————————
    1 8 2 9 1 2   primo prodotto.   ) parziale.
  2 2 8 6 4 0     secondo prodotto. )
 ———————————————
  2 4,6 9,3 1 2   prodotto totale.
```

Or aggiungendo come si è detto due zeri alla destra si avrà per prodotto reale 246,931,200.

§. 50. La stessa regola vale per multiplicare due numeri seguiti tutti e due da uno o più zeri, nel qual caso si tralascia tutti i zeri, e si opera solo su gl' intieri, ed infine dell' operazione si mette tanti zeri al prodotto totale, quasi ne ha uno tolti da prima, come nell' esemplo seguente.

Sia da multiplicare. 64000   Si multiplichi 6 4
per 3400   per . . . 3 4

```
            2 5 6
          1 9 2
          ———————
        2, 1 7 6 prodotto.
```

Or mettasi alla destra del prodotto ottenuto cinque zeri, e si avrà il prodotto reale in 2 1 7, 6 0 0,0 0 0.

§. 51. Per esaminare se la multiplica è giusta si fa uso della pruova detta del 9, ed ecco come:

```
    2 3   multiplicando.
    1 2   multiplicatore.
   ————
    4 6
  2 3
  —————
  2 7 6     prodotto totale

primo 5. | 6. terzo
—————————————————————
secondo 3.| 6. quarto
```

Si tolga il 9 quante volte si può dal multiplicando, e si noti il residuo, che in questo caso è 5 al primo luogo. Si tolga il 9 dal multiplicatore quante volte si può, e si noti il resto, che in questo caso è il 3 al secondo luogo. Si multiplichi i due residui e dal loro prodotto 15 si tolga il 9, e si scriva il resto 6 al terzo luogo. Finalmente si tolga il 9

dal prodotto totale e si noti il resto 6 al quarto luogo, che per essere eguale al resto superiore è segno certo che la multiplica è fatta a dovere.

Altro esempio.

```
   3 2 0  multiplicando.
     1 4  multiplicatore.
 --------
 1 2 8 0
   3 2 0
 --------
 4,4 8 0  prodotto totale.
```

```
5 | 7
--|--
5 | 7
```

Altro esempio.

```
  3 2 0  multiplicando.
    1 0  multiplicatore.
 -------
 3,2 0 0  prodotto totale.
```

```
5 | 5
--|--
1 | 5
```

Altro esempio.

```
  3 6 0  multiplicando.
      9  multiplicatore
 -------
 3,2 4 0
```

```
0 | 0
--|--
0 | 0
```

La proprietà del 9 sopra gli altri fa sì che sia proferito, e poste in pratica tutte le avvertenze si rende una pruova semplice, e spedita e certa.

— o *Assioma*.

Una quantità divisa per un numero, o pei fattori di questo numero, il quoto risultante è eguale, così: 60 diviso per 12 = 5; 60 diviso per 2 e per 6 = 5.

Divisione de' numeri incomplessi.

Metodo ausiliario della Sottrazione.

§. 52. La parola *dividere* significa spezzare un tutto in più parti. La *divisione* pertanto consiste nello spezzare un numero in più parti, o vero è un' operazione per la quale un numero dato si scioglie in un determinato numero di parti, e può dirsi essere un' operazione, per la quale si conosce, quante volte un numero maggiore contiene un altro minore. Ad evitare però questa replicata sottrazione, che si dovrebbe fare, e che alcune volte riuscirebbe lunga e tediosa, si è sostituito questo metodo ausiliario della sottrazione, ma diversamente eseguito, cioè la *divisione*.

§. 53. In questa divisione il numero contenente, o sia il numero proposto a dividere, che ben si conosce dover essere il maggiore, chiamasi *dividendo*; il numero contenuto, cioè quello per cui si divide, che dee essere necessariamente il più piccolo, dicesi *divisore*; ed il numero, che esprime quante volte il *divisore* è contenuto nel *dividendo*, o il *dividendo* contiene il *divisore* si appella *quoto* o *parte*. Vogliasi p. e. dividere 60 ducati per 10 ducati; tutto ciò che si cerca in quest' operazione è di sapere quante volte 60 ducati contengano 10 ducati; il quoto 6, che indica questo numero di volte è un numero astratto, e solamente in questi casi è chiamato a ragione *quoto* dalla voce latina *quoties*, *quante volte*, perchè mostra appunto colle sue unità quante volte il *divisore* si contiene nel *dividendo*. Ma se il *divisore* è un numero concre-

to , ed il *quoto* abbia delle unità della medesima specie del *dividendo*, sarà per conseguenza concreto, se il *dividendo* è concreto; l'operazione allora si riduce a dividere il *dividendo* in tante parti eguali, quante sono le unità del *divisore*, vogliasi p. e. dividere 40 ducati per 5 numero astratto, in questo caso si vuol dividere 40 ducati in otto parti eguali, essendo tale il numero delle volte che il 5 entra in 40, il numero 8 ducati denota una delle parti del *dividendo*, ed in questi e simili casi ciò che risulta dall'operazione chiamasi propriamente *parte*. Lo stesso sarebbe dividendo 40 ducati a 5 persone, il quoto 8 esprimente ducati, indicherebbe la parte, che spetta a ciascuna.

§. 54. Quando il dividendo ed il divisore sono due numeri astratti, il *quoto* è sempre un numero astratto. E se l'uno, e l'altro sono eguali, il *quoto* è l'unità, altro non significando che dividere una *quantità* per se stessa, per cui non può contenersi che una sol volta, come 5 diviso per 5 il quoto è uno.

§. 55. Di qualunque natura però siano le unità del dividendo, o del divisore, si può fare la divisione, come se si trattasse di sapere quante volte il dividendo contiene il divisore, determinando poi la specie delle uuità del quoto relativamente a quelle del dividendo, e del divisore, ed al senso in cui si è proposta la quistione.

§. 56. Ne' numeri semplici si troverà il quoto col sottrarre il divisore dal dividendo sino a che il dividendo sia esaurito, cioè non lasci alcun resto, e se non sia del tutto esaurito, il residuo, che rimane sia più piccolo del divisore, ed il numero delle sottrazioni, che dovrà farsi esprimerà quante volte il dividendo contiene il divisore o sia darà il *quoto*. Si cerchi p. e. il quoto di 14 diviso per 6. Togliendo 6 da 14 resta 8, togliende 6 da 8 rimane 2, dal quale non potendosi più sottrarre il 6, ne segue che il 14 è formato dal 6 preso due volte, più due unità, le quali si dovrebbe anche esse dividere per 6, ma essendo impossibile il dividerle *effettivamen-*

te, poichè un numero qualunque, come è in questo caso il 2, non contiene un altro numero più grande di esso, fa d' uopo almeno dividerle *indicativamente*, e questa indicazione consiste nello scrivere accanto al quoto il residuo 2, e sotto di esso il divisore, tirando fra loro una linea orizzontale, così $\frac{2}{6}$ espressione, chè si profferisce *due sesti*, *o due seste parti*. Dunque il *quoto* completo di 14 diviso per 6 è 2 più $\frac{2}{6}$. Ma se il 14 contiene il 6 due volte, più un resto di due; egli è chiaro che multiplicando il divisore 6 pel quoto 2, ed al prodotto 12 aggiunto il residuo 2 dee risultare il dividendo 14, però in generale il prodotto del *divisore* pel *quoto*, più il residuo, se vi è, restituisce il dividendo, o sia dà il medesimo dividendo, e da ciò può dedursi: che il dividendo contiene tante volte il divisore, quante il quoto contiene l' unità, o che il dividendo contiene tante volte il quoto, quante unità sono nel divisore.

§. 57. Ma la suddetta maniera di fare la divisione con la sottrazione sarebbe troppo lunga nella pratica, come si disse, soprattutto quando il dividendo è considerevole per rapporto al divisore. L' arte di abbreviare l' operazione è l' oggetto della divisione propriamente detta.

§. 58. È necessario per fare ogni sorta di divisioni che si sappia prima dividere un numero, che non contiene più di due cifre per un altro che ne contiene una sola, il che si fa col mezzo della tavola *pittagorica*; volendo p. e. dividere 81 per 9, si troverà che 9 ne è il quoto, giacchè 81 contiene nove volte 9; così 49 per 7, 7 ne sarà il quoto ec.

§. 59. Si osservi che nella divisione semplice fa d'uopo prendere per primo membro del dividendo un numero, che sia almeno eguale al divisore.

§. 60. Debbasi primamente dividere un numero composto

per un numero semplice.

6 7 5 9 dividendo		3 divisore	
6		2, 2 5 3	quoto
0 7		3	
6		6 7 5 9	pruova
1 5			
0 0 9			
9			
0			

Si mette un punto sopra la prima cifra 6 del dividendo, e veggasi quante volte 3 entra in 6; ci entra due volte, ed è vero, perchè multiplicato per 2 fa 6, e non supera la prima cifra del dividendo; si metta perciò 2 al luogo del quoto, e multiplicato per questo il divisore, il prodotto 6 si scriva sotto la prima cifra del dividendo e si faccia la sottrazione, ma come non rimane niente si segna zero. Messo poi un punto sopra la seconda cifra 7 del dividendo, si scriva accanto al zero e siccome il 3 entra due volte in 7 e non più dividendo parziale, scrivasi due nel quoto a destra dell' altro, e multiplicato per questo il divisore 3, il prodotto 6 si noti sotto il dividendo 7, e si sottragga scrivendo il residuo uno. Accanto a quell' uno si scriva il 5 terza figura del dividendo, dopo aver posto sopra il solito punto; e poichè 3 entra in 15 cinque volte, si metta 5 nel quoto ed a destra degli altri, e multiplicato questo per 3, il prodotto 15 si sottragga dal dividendo parziale 15 notando zero. Finalmente scritta l' ultima cifra 9 del dividendo accanto al zero, siccome 9 contiene tre volte il 3, si metta 3 nel quoto, e 'l prodotto di questo pel divisore 3, cioè 9 si sottragga dal dividendo parziale 9; non

rimane nulla, ne' altri numeri vi sono nel dividendo, perciò l' operazione è composta, e 'l quoto è 2,253 senza resto, vale a dire che il divisore 3 è contenuto nel dividendo 2,553 volte.

Or si multiplichi il divisore pel quoto, e trovato il prodotto eguale al dividendo, come vedesi nel esemplo, sarà certo di non aver errato.

§. 61. Se nella divisione composta una o più cifre del divisore sono maggiori di una o più cifre del dividendo, si comincerà l' operazione, prendendo due cifre nel dividendo, quanto la maggiore di quelle del divisore è una, o prendendone tre nel dividendo, se le due del divisore sono maggiori in valore delle due del dividendo, ec. Avvertendo però che il divisore non può mai contenersi nel dividendo parziale più di nove volte.

```
 . . . .
 4 5 9 2  dividendo.      | 39     divisore.
 3 9                      ----------------   quoto
 -----                    |    117. 29/39
=6 9                      ----------------
 3 9
 -----
   3 0 2
   2 7 3
 -------
  = 2 9
```

Essendo una delle cifre del divisore maggiore di una delle prime due del dividendo, si metta il punto su la seconda cifra. E come il 3 entra in 4 una volta col resto di uno, il quale unito al 5 risulta 15, e 'l 9 seconda figura del divisore va in 15 una volta, così si scrive uno nel quoto, ed il prodotto di 39 per uno, cioè 39 si noti sotto il dividendo, da cui sottratto rimane 6. Accanto a questo si scriva la terza cifra 9 del dividendo, e si osservi quante volte il 3 prima cifra del divisore cape in 6 prima cifra del dividendo parziale;

pare che vi entri due volte, ma come il 9 seconda cifra del divisore non cape due volte in 9 seconda cifra del dividendo parziale, si dovrà dire: vi entra una sol volta, e scrivere uno nel quoto, e ciò praticar si deve ogni qual volta si paragona il primo numero di qualunque divisore col primo numero del dividendo. Fatto il prodotto di 39 per uno, e sottratto da 69, si otterrà per residuo 30, a cui scritto accanto il 2 ultima cifra del dividendo, si osservi quante volte il 3 entri in 30 parrebbe che vi potesse entrare nove volte, ma come non cape del pari il 9 seconda cifra del divisore in ciò che rimane, si veda se vi entra otto volte, ma per la stessa ragione neppure vi cape, perciò si fisserà a sette volte e scritto nel quoto il prodotto del divisore per 7 si sottragga dal dividendo parziale, ottenendo il residuo 29. L' operazione è fatta, ed il residuo rimasto si noti accanto al quoto, come si disse col divisore sotto, il quale è $117\frac{29}{39}$

```
6 5 8 9  dividendo    82      divisore
6 5 6                 ——    ———————    quoto
———————               80.     29
—0 2 9                        ——
                              82
```

§. 62 Siccome le due cifre del divisore valgono più delle due prime del dividendo, si ponga il punto su la terza figura del dividendo, e si dica l' 8 in 65 quante volte vi entra? può capire otto volte, giacchè l' uno, che supera coll' 8 terza cifra facendo 18, il 2 seconda cifra del divisore cape pure otto volte, si metta perciò 8 nel quoto, e 'l prodotto di quello per questo sottratto dal dividendo, si avrà 2 per resto, a cui scritta accanto l' ultima cifra 9 del dividendo, si otterrà 29 per dividendo parziale, che per esser minore di 82 divisore si pone zero nel quoto a destra dell' 8, e 'l 29 si nota accanto al quoto col divisore sotto, come è la regola. L'operazione è ultimata, avendo ottenuto per quoto 80 più $\frac{29}{82}$.

§. 63. Si debba ora dividere 32035 per 469 disposto il dividendo, ed il divisore come vedesi, si dica:

```
3 2 0 3 5 dividendo        4 6 9  divisore
2 8 1 4                    68. 143/469  quoto
-----------
  = 3 8 9 5
    3 7 5 2
-----------
    = 1 4 3
```

Come le tre prime cifre del dividendo non contengono le tre cifre del divisore, si metta il punto su la quarta, e si osservi quante volte il divisore 469 entra in 3203, o ciò che torna lo stesso; quante volte il 4 prima cifra del divisore cape in 32 prime due cifre del dividendo, e questo può aversi per regola generale, potrebbe entrarvi otto volte, ma come le altre due cifre del divisore non entrano egualmente nel zero, e nel 3 si dovrà diminuire l' 8 di un' unità, e ridurlo a 7, ma per la stessa ragione è sempre troppo grande, perciò scrivasi nel quoto soltanto 6, ed il prodotto di 469 per 6 si sottragga dal dividendo parziale, notando il residuo. Accanto a questo resto si scriva la cifra 5 ultima del dividendo, e si veda quante volte la prima cifra del divisore cape nelle due prime del dividendo parziale, o sia 4 in 38. Potrebbe entrarvi nove volte col resto di due, che unito alla cifra seguente 9 forma 29, nel quale non vi può entrare il 6 nove volte, perciò si noti nel quoto soltanto 8, e 'l prodotto del divisore per 8 sottratto dal dividendo parziale farà ottenere per residuo 143, che per non esservi altre cifre nel dividendo, si scrive accanto al quoto col divisore sotto, come la regola prescrive.

64. Ciascuna divisione parziale non dà al quoto che una sola cifra, ed è perciò che il quoto totale conterrà sempre tante cifre, quante divisioni parziali si sarà fatto.

§. 65. Può accadere nella divisione che al residuo rimasto da una divisione parziale, unendogli la seguente cifra del dividendo, non si ottenga un numero tale da contenere il divisore, ed in tal caso il quoto parziale, che risulterà da questa divisione sarà zero, per cui si scriverà zero nel quoto, e scritta un' altra cifra del dividendo accanto al residuo, si continuerà la divisione, come si rileva dall' esempio seguente :

```
 . .
3 3 2 3   dividendo   | 1 6  divisore .
3 2                   -----------
-------                |  2 0 7  11/16   quoto .
=1 2 3
  1 1 2
-------
=   1 1
```

Posto il punto su la seconda cifra del dividendo, si osservi che il divisore 16 non può contenersi che due volte in 33, o sia l' 1 in 3, da cui sottratto il prodotto di 16 per 2 si ha uno per residuo, a cui scritta accanto la terza cifra del dividendo si ha 12, minore di 16, per cui scriver si dee zero nel quoto, e scritta l'ultima cifra del dividendo accanto al residuo o dividendo parziale 12 si avrà 123, nel quale il divisore 16 cape soltanto sette volte. Or multiplicato il divisore 16 per 7, e 'l prodotto sottratto dal dividendo parziale, si otterrà 11 per resto, che si pone al solito nel quoto per non esservi altri numeri nel dividendo.

§. 66. Volendo abbreviare la divisione ecco un altro metodo. Si riprenda l' esempio del §. 63, che servirà di norma per tutti gli altri.

```
      . .
3 2 0 3 5   dividendo   —4 6 9   divisore
  3 8 9 5               ---------
    1 4 3                6 8  143/469  quoto
```

Dopo di esser uno certo che il 4 prima cifra del divisore entri soltanto sei volte nelle due prime cifre del dividendo, o di aver posto 6 nel quoto, senza multiplicare il divisore pel quoto 6, e 'l prodotto sottrarlo dalle prime quattro cifre del dividendu per ottenere il residuo, si faccia così: si multiplichi l' ultima cifra 9 del divisore per 6 il che dà 54, e si dica oprando su il 3 quarta cifra del dividendo, per giungere a 63 quanto vi è, giacchè dopo il 54 non si trova più il 3 che nella decina seguente, ci è 9, che si segnerà sotto il 3, ritenendo 6, indi si multiplichi 6 seconda cifra del divisore pel quoto 6, il che da 36 e sei, che si è ritenuto, 42 e si dica operando su il zero terza cifra del dividendo, per andare a 50 vi è 8, per cui si noterà 8 sotto il zero portando 5; e finalmente multiplicato il 4 prima cifra del divisore pel quoto 6, il che dà 24, e 5, che si è ritenuto 29, si dica: per andare a 32 vi è 3, che si scrive sotto il 2 seconda cifra del dividendo; ed ecco che si è ottenuto lo stesso residuo dell'esemplo §. 63. dopo aver fatta la prima sottrazione. Scritta l' ultima cifra 5 del dividendo accanto al residuo, ed osservato che 4 prima cifra del divisore entra otto volte, e non più nelle due prime cifre 38, si scriva 8 nel quoto, e si dica, otto volte nove fanno 72 per giungere a 75 vi è 3, che si scrive sotto il 5, ritenendo 7; si dica poi sei volte 8 fanno 48, e sette che si è ritenuto 55, per arrivare a 59 vi è 4, che si scrive sotto il 9 portando 5. Finalmente multiplicato 8 per 4, il che dà 32, e 5 che si è portato 37 si dica: deve arrivare a 38 vi è uno, si scriva quest' uno sotto l' otto, e si sarà ottenuto l' altro residuo simile al §. 63, dopo di aver fatto la seconda sottrazione.

§. 67. Da quanto si è detto fin quì dedursi può che la sola difficoltà, che s' incontra nella pratica della divisione consiste in determinare ciascun quoto; dunque tutta l'arte della divisione de' numeri espressi da molte cifre consiste a partire il dividendo totale in più dividendi parziali, che siano divisibili pel divisore o sia che ciascun dividendo parziale contenga il divisore, quali due numeri devono accostarsi all' eguaglianza più che sia possibile. La difficoltà della

operazione cresce in proporzione che si aumenta il numero delle cifre del dividendo e del divisore, e che le cifre della sinistra del divisore sono più piccole rapporto alle altre che seguono. La regola, che può darsi si è che non si affermi essere un quoto esatto, e non si scriva se non dopo che si è certo che il prodotto dell' intero divisore per questa cifra si può sottrarre da quel dividendo sopra il quale si opera nell' atto. Se questo prodotto è troppo grande si diminuisca di un' unità la cifra, o pure di due, ec. usando lo stesso metodo sinchè il prodotto dell' intero divisore per questa cifra si contenga nel dividendo.

§. 68. Per diminuire pertanto il numero di questa sorta di tentativi, dirò così inevitabili, ecco un mezzo di facilitare alquanto le operazioni della divisione:

Esemplo. — 123489 divisore

```
9 7 8 6 5 4̇ 3  dividendo     | 79 . 30912/123489  quoto
8 6 4 4 2 3
-------------
1 1 4 2 3 1 3
1 1 1 1 4 0 1
-------------
=0 3 0 9 1 2
```

Posto il punto su la stessa figura del dividendo si supponga che l' uno prima cifra del divisore entri almeno otto volte in 9 prima cifra del divideudo, e si provi a sottrarre dal dividendo il prodotto delle cifre del divisore per 8 a misura che si trova.

Tutto ciò si faccia senza nulla scrivere dicendo: una volta 8 fa 8, otto tolto da 9 rimane 1, che unito alla seconda cifra 7, si ha 17, due volte 8 fanne 16, sedici tolto da 17 resta uno, che coll' 8 terza cifra fanno 18, tre volte otto fanno 24, ma 24 non può esser tolto da 18, dunque la cifra 8 è tropppo grande, e fa d' uopo mettere nel quoto 7, sottomesso però alla stessa pruova, e trovando un residuo eguale, o

più grande della cifra è segno certo che questa cifra può essere scritta nel quoto. Di fatti egli è manifesto che il dividendo contiene sette volte il divisore, giacchè multiplicato l'intero divisore pel quoto 7, e sottratto dal dividendo si è ottenuto un residuo, come vedesi nell' esemplo. Essendovi altre cifre nel dividendo, si scriva ciascuna di queste successivamente accanto al residuo, e si prosegua l' operazione, come si è fatto sopra.

§. 69. Se un numero qualunque si deve divider per 10, si tolga una cifra dalla parte destra del dividendo, e vi si metta un punto, le cifre, che restano prima del punto esprimono il quoto, e la cifra, che rimane tolta è un residuo:

3 4 5 . 8 dividendo	10 divisore
	345 $\frac{8}{10}$ quoto

A seconda di quanto si è detto, posto il punto dopo la terza cifra del dividendo, si scorgerà subito che questa divisione ha per quoto 345 col resto di 8.

§. 70 E se il numero è da dividersi per 100. si stacchi due cifre, e sarà come sopra:

8 5 . 2 9 dividendo	100 divisore
	85 $\frac{29}{100}$ quoto .

§. 71. E se il dividendo è composto di un numero seguito da più zeri, e se infine del dividendo vi sono tanti zeri quanti ve ne ha nel divisore, togliendo egual numero di zeri nell' uno e nell' altro, ciò che rimane nel dividendo sarà il quoto, p. e. volendo dividere 750,000 per 1000 si toglia tre zeri dal dividendo ed il resto 750 sarà il quoto cercato. La

ragione si è che dividere un numero per mille è lo stesso che cercarne la millesima parte, o sia ridurlo mille volte più piccolo.

§. 72. Quando il solo divisore è terminato da zeri, si abbrevia la divisione separando alla fine del dividendo tante cifre, quanti zeri sono nel divisore. Si divida poi le altre cifre per le sole rimanenti cifre del divisore e si otterrà del pari il quoto:

2 3 8 8, 7 3 dividendo	3 6 . o o divisore
	66. $\frac{12}{36}$ quoto

Come si è prescritto si faccia la divisione su le sole quattro prime cifre del dividendo, preso per divisore il solo 36 e si otterrà come si vede il quoto 66 col residuo 12.

Or si faccia la divisione senza togliere i due numeri al dividendo, nè i due zeri al divisore.

2 3 8 8 7 3 dividendo	3 6 o o divisore.
2 1 6 o o	66. $\frac{1273}{3600}$ quoto
= 2 2 8 7 3	
2 1 6 o o	
= 1 2 7 3	

Fatta l'operazione è la stessa, solche nel primo caso si aggiunga al residuo le due cifre tolte, ed al divisore i due zeri.

§. 73. Volendo dividere un numero per 2 si prenderà la metà di tutte le cifre di detto numero, e per 3 si prenderà il terzo e così di seguito. Quando il numero è dispari come il 3, il 5 si prende la metà, e l'unità che supera si unisce al numero seguente.

§. 74. **Pruova del 9 per la divisione.**

```
9 7 5   dividendo      — 36   divisore
7 2                   |————————————
————                  |   27   quoto
2 5 5                  ————————————
2 5 2
————
=0 3

primo    0 | 3  terzo
——————————|——————
secondo  0 | 3  quarto
```

Si tolga il 9 dal divisore quante volte si può, e si noti il resto, che qui è zero al primo luogo. Indi dal quoto, e si noti il residuo al secondo luogo, che pure è zero. Si moltiplichi poi i due numeri trovati ed al prodotto aggiunto il resto della divisione, si tolga dal tutto il 9, e non potendo, come quì, si noti il residuo 3 al terzo luogo. Finalmente si tolga il 9 dal dividendo, e si noti il resto, e trovatolo come quì eguale al superiore, segno è che l' operazione è giusta.

Altra pruova del 9.

```
8 5 6
5 2                   — 5 2   divisore
————                  |————————————
3 3 6                 |   1 6      quoto
3 1 2                  ————————————
————
=2 4

primo    7 | 1  terzo
——————————|——————
secondo  7 | 1  quarto
```

Altra pruova della divisione si è dimostrata al §. 52.

Modo di ritrovare i fattori de' numeri.

Riflessioni.

§. 75. Considerar si può taluni numeri come prodotti da altri più piccoli, e molti no; così può considerarsi il 4 derivato dal prodotto di 2 per 2, che anche è diviso esattamente da questo, il 6 da quello di 3 per 2; il 12 da 6 per 2, o dal 4 per 3, o vero dal 2 per 2 e per 3, ec. Altri numeri poi, che non derivano mai dalla multiplica di altri più piccoli, e perciò non si può dividerli per questi senza residuo, come 1. 2. 3. 5. 7. 13. 17., ec. In generale pertanto divider si può i numeri in multipli, e primi.

§. 76. Per numero primo s' intende quello, che non ha altri divisori, che se stesso e l' unità, e tali sono i già sopra cennati 1. 2. 3. 5. 7. 11. 17. 19. ec. Si faccia però attenzione che non tutti i numeri dispari sono primi, sia d' esempio il 15, il 21, il 35, ec. quali, benchè numeri dispari, sono divisibili: il primo per 3, e per 5; il secondo per 3 e per 7; il terzo per 5 e per 7, ed il 2 che quantunque pari, è primo, non essendo divisibile che per se stesso, e per l' unità; a riserva di questo, tutti i numeri primi son dispari.

§. 77. Ogni numero dispari o è primo o è il prodotto di più numeri primi.

§. 78. Due numeri sono primi fra loro, quando non hanno una misura comune, o vero un divisor comune, se non che l' unità, come 3 e 16; 8 e 19 ec.

§. 79. Ogni numero eguale a più volte due, è multiplice di due, e divisibile per 2, chiamandosi numero pari, come 4. 6. 8. 10. 14. 16 ec.

§. 80. Volendo ritrovare per ordine tutti li divisori di un numero, si divida successivamente per tutti i numeri primi, prima per 2 sino a che si può, indi per 3, ed in seguito per 5, ec. e così si continui fino a che il residuo sarà minore del divisore su cui si è operato.

Esempio.

Numero dato 150.	2.
75.	3. . 6.
25.	5. . 10. . 15, 30.
5.	5. . 25. 50. 75. 150.
1.	

Usando lo stesso metodo si troverà i divisori di qualunque numero, come di 360, 924, ec.

Il numero 150 dato, di cui si cerca tutti i divisori o fattori per ordine, si divida per 2, e 'l quoto 75 si ponga sotto lo stesso dividendo, e il divisore 2 accanto, come si vede. Indi perchè il 75 non può esser diviso per 2 esattamente, si divida per tre, e si metta il quoto 25 sotto il 75, e 'l divisore 3 appresso. E perchè 25 per la stessa ragione non può dividersi per 3, si divida per 5, ed il quoto 5 pongasi sotto il 25, ed accanto. E finalmente, perchè 5 diviso per 5 non dà che uno, si noti uno sotto il 5. Con questa operazione si avrà tutti i divisori semplici della data quantità, cioè 2. 3. 5. 5.

Se vogliasi i divisori composti, si multiplichi prima il divisore semplice 2 pel secondo divisore 3 pure semplice, ed il sub prodotto 6 si ponga a destra del 3. Indi si multiplichi 2 primo divisore per 5; 3 secondo divisore pure per 5; e 2 per 3 e per 5, e si ponga i loro prodotti 10. 15. 30. alla destra dello stesso divisore 5. Finalmente multiplicato 5 per 5 quarto divisore, e tutti i numeri or ritrovati si avrà i prodotti 25, 50, 75, 150, quali scriver si devè presso dell' ultimo divisore 5, ottenendo così i divisori composti. Se il numero dato fosse stato un numero dispari, era inutile il tentare di dividerlo per 2, ma si doveva cominciare a dividerlo per 3; e se nemmeno potevano aver luogo le divisioni, era manifesto che tal numero non aveva fattori, e perciò era primo, come si avesse dovuto operare su il numero 87.

§. 81. Prima di passare a considerare i tutti, numeri de.

rivati dai residui delle divisioni, e suscettibili essi pure delle operazioni medesime, a cui van soggetti i numeri fin quì trattati, sarà utile per meglio intendere la teoria di questi rotti, far la seguente divisione.

3 8 6 8 3 dividendo	10. divisore
3 0	3868 $\frac{3}{10}$ quoto
= 8 6	
8 0	
= 6 8	
6 0	
= 8 3	
8 0	
3	

§. 82. È necessario altresì sapere che qualunque unità è divisibile in metà, terzi, quarti, quinti, sesti, settimi, ottavi, noni, decimi, duodecimi, ec. che perciò la metà di uno è $\frac{1}{2}$; la terza parte $\frac{1}{3}$; la quarta parte $\frac{1}{4}$, che equivale a due ottavi; due quarte parti $\frac{1}{2}$, equivalente a $\frac{4}{8}$; tre quarte parti $\frac{3}{4}$; che equivalgono a $\frac{6}{8}$; la sesta parte $\frac{1}{6}$; due seste parti $\frac{1}{3}$, quattro seste parti $\frac{2}{3}$, ec. Una decima parte $\frac{1}{10}$; una duodecima parte $\frac{1}{12}$; cinque decime parti $\frac{1}{2}$; sei dodicesi-

mi $\frac{1}{2}$; otto dodicesime $\frac{2}{3}$; nove dodicesime parti $\frac{3}{4}$, ec.

§. 83. Ed è ancora utile l'apprendere alcuni segni, che abbreviano il linguaggio nelle operazioni de' rotti, ed ecco la figura, ed il loro valore: questo segno + significa *più*, e questo — meno; questo = *eguaglianza*; questo × *multiplicato per*; questo : *diviso per*, o vero una linea posta fra i due numeri. Così 2 + 2 = 4, vale a dire due più due eguale a quattro; 6 = 6; cioè sei eguale a sei; 4 × 2 = 8 significa quattro multiplicato per due eguale a otto; 6 : 3 = 2 denota sei diviso per tre eguale a due, o $\frac{6}{3} = 2$, che vuol pure denotare: sei diviso per tre eguale a due.

FRAZIONI.

§. 84. Accade talvolta nel dividere un numero per un altro, come si è veduto, che giungasi ad un residuo minore del divisore, e perciò non divisibile per esso. In questo caso la divisione del residuo pel divisore indicata da questi due numeri separati da una linea, scritto il residuo superiormente al divisore, costituisce una *frazione*, un *rotto*, o sia una divisione indicata, che non può eseguirsi colle regole precedenti, per essere il dividendo minore del divisore, per cui la frazione è sempre minore dell' unità; tale è $\frac{3}{10}$ frazione ottenuta dalla divisione imperfetta testè eseguita.

§. 85. De' due numeri costituenti la frazione, il superiore, che rappresenta il *dividendo* chiamasi *numeratore*, l'inferiore rappresentante il *divisore* dicesi *denominatore*, e si l' uno che l' altro si comprende sotto il nome di termini della frazione. Appellasi *denominatore* il divisore 10, perchè da la denominazione a queste parti, determinando se siano quinti, decimi, ec., chiamasi numeratore il dividendo 3 perchè numera quante delle parti dell' unità divisa, determinate dal denomi-

natore, si deve prendere. La frazione $\frac{3}{10}$ significa adunque che l'unità si deve dividere in dieci parti eguali, e di queste se ne ha da prendere tre; vale a dire tre decime parti dell'unità principale che si legge *tre decimi*, ed una di queste parti chiamasi unità frazionaria.

§. 86. Le funzioni del *numeratore* di una frazione sono pertanto due: la prima è di rappresentare il tutto da dividersi, come residuo di una divisione; la seconda è d'indicare il numero delle unità *frazionarie*, di cui la frazione è composta; ma la specie, e la grandezza di queste unità per rapporto all' unità principale dipende dal *denominatore*. Il *denominatore* adunque è quello che caratterizza la natura di una frazione.

§. 87. Qualunque frazione pertanto può esser considerata, come il quoto del suo *numeratore*, diviso pel suo *denominatore*, così la frazione $\frac{1}{10}$ non è che il quoto di 1 diviso per 10, giacchè dividere 1 per 10 è prendere di ciascuna delle unità del dividendo quella parte, che dinota il divisore, che in questo caso è la decima, perciò è chiaro che il quoto costerà di una decima parte presa una volta cioè di $\frac{1}{10}$. Lo stesso dicasi di qualunque altra frazione, come $\frac{3}{10}$.

§. 88. Se il *numeratore* di una frazione è eguale al suo *denominatore* la frazione eguaglia un intero, cioè l'unità, perchè il quoto di qualunque numero diviso per se stesso è necessariamente *uno*, così $\frac{5}{5} = 1$, poichè l'unità è divisa in cinque parti eguali, e di queste se ne prende cinque, vale a dire si prende tutte le parti dell'unità o sia l'unità stessa, p. e. $\frac{1}{5}$ di un ducato è un tarì, perciò $\frac{5}{5}$ sono cinque tarì o un ducato.

§. 89. Si è detto al §. 84, che la frazione è sempre

minore dell' unità, perciò trovando delle spressioni maggiori dell' unità, non sono esse vere frazioni, chiamandosi o *supposte*, o *miste*; ma divisioni indicate e non eseguite: soltanto sono eseguite, quando si cerca quanti intieri esse contengono.

§. 90. Frazione *supposta* è quella il di cui numeratore, contiene un certo numero di volte il suo denominatore, senza alcuno resto, come $\frac{12}{3} = 4$.

§. 91. Frazione *mista* è quella, il cui numeratore contiene un certo numero di volte il suo denominatore, e vi supera una qualche cosa, come: $\frac{14}{4} = 3, \frac{2}{4}$ Quando dunque il numeratore è più grande del denominatore, la frazione è maggiore dell' unità.

§. 92. Frazione *vera* è quella, che ha sempre il suo numeratore più piccolo del denominatore, rappresentando questa il residuo della divisione, così: $\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}$, ec. quando adunque il numeratore è più piccolo del denominatore, la frazione è minore dell' unità.

§. 93. Il valore intrinseco di una frazione è maggiore del valore di un' altra frazione, ogni qualvolta il valor delle parti frazionarie dell' una frazione espressa dal denominatore supera quelle delle parti frazionarie dinotate dal denominatore dell' altra frazione, relativamente però all' unità principale, §. 86., perciò $\frac{4}{5}$ maggiori di $\frac{3}{6}$, e $\frac{6}{8}$ maggiori di $\frac{2}{3}$, ec. E volendo render questo più chiaro, si supponga che il numeratore 4 della prima frazione significasse ducati, la frazione $\frac{4}{5}$ sarebbe quattro quinte parti dell' unità principale §. 82. o sia di un ducato, cioè carlini 8. E supponendo che il numeratore 3 della seconda frazione indicasse pure ducati, la frazione $\frac{3}{6}$

varrebbe tre seste parti dell' unità principale §. 82. o di un ducato, vale a dire carlini 5; perciò il valor della prima frazione maggiore del valore della seconda. E ciò deve essere necessariamente, perchè le frazioni sono altrettante divisioni, ec. così dicasi delle altre, ec. così $\frac{5}{8}$ maggiori di $\frac{2}{8}$; e $\frac{5}{6}$ maggiori di $\frac{2}{6}$.

§. 95. Dunque quando si dice, riprendendo la frazione $\frac{4}{5}$, che il tutto si deve dividere in cinque parti eguali, e di queste se ne deve prender quattro, si osservi che intender sempre si deve quattro quinte parti dell' unità principale, di cui è composto il tutto, che qui sarebbe un ducato, e non del tutto, giacchè in questo caso quattro quinte parti del tutto sarebbero carlini 32 e non carlini 8, come sono realmente. Lo stesso dicasi della frazione $\frac{3}{6}$ di cui l' unità principale essendo egualmente un ducato, tre seste parti sono carlini 5, e non 15 come se si prendesse tre seste parti del tutto; ma sì nell' una che nell' altra frazione si può prendere o una quinta parte del tutto nella prima, o una sesta parte del tutto nella seconda, il che poi torna lo stesso che prendere $\frac{4}{5}$ parti dell' unità principale nella prima, e tre seste parti dell' unità principale nella seconda.

§. 96. Si duplica, si triplica, ec. il valore di una frazione o col multiplicare il suo numeratore o col dividere il suo denominatore, per 2 per 3, ec. così nella frazione $\frac{2}{5}$ multiplicando il suo numeratore per 2 si avrà $\frac{4}{5}$, che ne è il doppio. Nella frazione $\frac{1}{4}$, diviso il suo denominatore per 2, si otterrà $\frac{1}{2}$ doppio di $\frac{1}{4}$.

§. 97. Qualunque volta si diminuirà due o più volte il denominatore di una frazione, lasciando intatto il suo numeratore, si otterrà una frazione due o tante volte maggiore della prima per quante volte si sarà diminuito il denominatore. Abbiasi la frazione $\frac{3}{4}$ e si prenda la metà dal suo denominatore facendo $\frac{3}{2}$. È evidente che questa è il doppio della frazione $\frac{3}{4}$, per essere $\frac{3}{2} = 1.\frac{1}{2}$ §. 91. Del pari accrescendo il suo denominatore si renderà minore, così di $\frac{3}{4}$ si duplichi il suo denominatore e si avrà $\frac{3}{8}$.

§. 98. Il valore di una frazione rimane sempre lo stesso, benchè si multiplichi o si divida i suoi due termini per la stessa quantità e si renda o il doppio, o il triplo ec. così: $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{6}$ il che dividendo, torna eguale a $\frac{2}{3}$. Così $\frac{3}{6} : 3 = \frac{1}{2}$, che multiplicato per 2 dà $\frac{3}{6}$.

§. 99. Ecco dunque la prova che le frazioni si possono trasformare senza alterarne il proprio valore, e ciò facilita di molto le loro operazioni. È necessario però saper prima ridurre l'intieri a rotti, senza che perdano di valore.

Riduzione degli intieri a rotti.

§. 100. Ogni intero diviene rotto ponendogli l'unità per denominatore, così: $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{7}{1}$, ec. sono intieri ridotti in frazioni, il cui denominatore è l'unità, ma il quoziente dell'intero diviso per 1 è lo stesso dividendo.

§. 101. Si ridurrà un intero a frazione di qualsivoglia denominatore multiplicando l'intero pel denominatore dato, il prodotto sarà il numeratore della nuova frazione, che avrà lo stesso denominatore, così: 6 sarà ridotto a frazione del dato denominator 7 facendo $\frac{42}{7}$, che diviso per 7, il quoziente è 6, valore della frazione, perciò $6 = \frac{42}{7}$.

§. 102. Un intero unito con una frazione sarà ridotto in una sola frazione, multiplicando l'intero pel denominatore della frazione, aggiungendo a questo prodotto il numeratore, la somma sarà il numeratore della nuova frazione, a cui si darà lo stesso denominatore, così: $6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$; che diviso per $4 = 6\frac{1}{4}$.

Trasformazione delle frazioni.

§. 103. Questa trasformazione consiste ne' diversi cambiamenti, che si fa subire alle frazioni, senza però alterare il loro valore; o sia è dar loro una diversa forma per assoggettarle più facilmente al calcolo.

Si trasforma una frazione in un' altra o multiplicando il numeratore e il denominatore per lo stesso numero, formando così de' due prodotti una nuova frazione eguale alla prima, come: volendo trasformare la frazione $\frac{2}{3}$ essa diviene multiplicati i suoi due termini per $3 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; o dividendo il numeratore, e il denominatore per lo stesso numero, come, volendo trasformare la frazione $\frac{8}{12}$, essa diviene dividendo i suoi due termini per $4 = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

§. 104. Si trasforma una frazione in un'altra di un dato denominatore, multiplicando il numeratore della frazione pel dato denominatore, e dividendo il prodotto pel denominatore dello stesso rotto, il quoziente, che si otterrà, sarà il numeratore della frazione richiesta, a cui si darà il dato denominatore, sia da trasformarsi la frazione $\frac{2}{3}$ in un'altra, che abbia per denominatore 30, come 60 è il prodotto di 30×2, e 20 il quoziente di $\frac{60}{3}$ sarà la frazione cercata $\frac{20}{30}$ o sia $\frac{2}{3}$.

§. 105. Si trasforma due frazioni date in due altre, che abbiano la stessa denominazione, e che siano eguali alle prime, multiplicando i due termini della prima frazione pel denominatore della seconda, e de' prodotti formare una frazione; indi multiplicare i due termini della seconda frazione pel denominatore della prima e de' prodotti formare egualmente un' altra frazione. Siano le frazioni da trasformarsi $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{5}$, si faccia $\frac{2 \times 5 = 10}{3 \times 5 = 15} = \frac{2}{3}$; si faccia poi $\frac{3 \times 3 = 9}{5 \times 3 = 15} = \frac{3}{5}$, e si sarà ottenuto le due frazioni $\frac{10}{15}$, e $\frac{9}{5}$ di egual valore, eguale la prima a $\frac{2}{3}$, la seconda a $\frac{3}{5}$, perchè in questa operazione non si fà altro che multiplicare i termini della frazione per lo stesso numero, il che non ne cangia il valore, §. 98.

§. 106. Se poi date due frazioni da trasformarsi in due altre della medesima denominazione, il denominatore di una divida esattamente il denominatore dell'altra, allora si faccia la divisione de' denominatori, e si noti il quoziente, per questo quoziente si multiplichi i termini della frazione, il cui denominatore è stato dividente, e con ciò sarà ridotta alla stessa denominazione dell'altra. Siano le frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{15}$ diviso il denominatore 15, per 3 si ha 5, per questo si multiplichi la

frazione $\frac{2}{3}$ e si otterrà $\frac{10}{15}$, frazione di egual denominazione dell'altra, cioè di $\frac{4}{15}$. In simil guisa si può ridurre più frazioni alla medesima denominazione, purchè vi siano le condizioni stesse, vale a dire che il denominatore di una sia divisibile pel denominatore di ciascun altra, come: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ = $\frac{8}{12}$, a $\frac{9}{12}$, a $\frac{3}{12}$.

§. 107. Le frazioni supposte sono trasformabili anche esse, cioè si può ridurle ad intieri, dividendo il numeratore pel denominatore, il quoziente indicherà gl'intieri contenuti nella frazione, ed il residuo, se vi è, esprimerà parti della denominazione della frazione, così: $\frac{24}{6} = 4$; e $\frac{38}{5} = 7\frac{3}{5}$.

108. Si ridurrà due frazioni alla stessa denominazione col multiplicare soltanto il numeratore della prima pel denominatore della seconda, e'l numeratore della seconda pel denominatore della prima, mettendo sotto questi due numeri il prodotto de'due denominatori. Siano le frazioni $\frac{6}{8}$ e $\frac{3}{5}$ oprando come si è detto si avrà $\frac{30}{40}$, e $\frac{24}{40}$.

§. 109. Si ridurrà più frazioni allo stesso denominatore multiplicando tutti i denominatori fra loro, ottenendo in questo prodotto il denominatore comune, indi multiplicando il numeratore di ciascuna frazione per ciaschedun denominatore delle altre frazioni, eccetto il proprio, e si otterrà i corrispondenti numeratori, così per ridurre le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ alla stessa denominazione, si multiplichi prima i denominatori 2 e 4 insieme e'l prodotto 8 per l'altro denominatore 5 e si avrà 40, che sarà il *denominatore comune*; si multiplichi poi il primo numeratore 1 per 4 e per 5, il che dà 20; il numeratore 3 per 2

e per 5, il che dà 30, e finalmente il numeratore 2 per 4 e per 2, il che dà 16, e si sarà formato le nuove frazioni $\frac{20,\ 30,\ 16}{40}$ ridotte in tal modo alla stessa denominazione, aventi il medesimo valore delle prime, e rappresentando parti dell' unità divisa in egual numero di parti. Giacchè il numeratore e 'l denominatore di ciascuna, se ben si considera, sono multiplicati per uno stesso numero, il che non cangia valore, §. 98., e sia di ciò la pruova l' esempio seguente riprendendo le stesse frazioni: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$. Si multiplichi i due termini della prima frazione per 20, prodotto del secondo e terzo denominatore; i due termini della seconda frazione per 10 prodotto del primo pel terzo denominatore; ed i due termini della terza frazione per 8, prodotto del primo pel secondo denominatore, con queste operazioni si otterrà le tre frazioni $\frac{20,\ 30,\ 16}{40}$ quali hanno il medesimo denominatore, ed i medesimi valori delle frazioni $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$, essendo che il numeratore ed il denominatore di ciascuna, si è multiplicato per lo stesso numero, il che non altera il valore, §. 98.

§. 110. Si può ancora ridurre le frazioni alla stessa denominazione nel modo seguente: date le frazioni $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\ \frac{1}{8}$ da ridurre alla stessa denominazione, si scelga, se è possibile, un numero, che sia divisibile senza resto da ciascuno dei denominatori delle frazioni, e di questo si faccia il denominator comune. Indi si divida per ogni denominatore di ciascuna frazione, ed il *quoto* si multiplichi pel numeratore della frazione:

Esem-

Esemplo

		frazioni date.		quoti		frazioni ridotte alla stessa denominazione:
denominator comune	24		$\frac{2}{3}$		8.	$\frac{16}{24}$
			$\frac{3}{4}$		6.	$\frac{18}{24}$
			$\frac{5}{6}$		4.	$\frac{20}{24}$
			$\frac{1}{8}$		3.	$\frac{3}{24}$

§. 111. Per ridurre una frazione alla più semplice spressione si deve trovare un numero, che divida esattamente, cioè senza resto, sì il numeratore, che il denominatore della frazione. Volendo pertanto ridurre la frazione $\frac{9}{27}$ alla più semplice espressione, si prenda un numero, come: 3 che divide senza resto il numeratore, e 'l denominatore, i *quoti* 3 e 9 formeranno la frazione $\frac{3}{9}$ ridotta alla più semplice espressione equivalente alla prima, così di $\frac{16}{60}$ la spressione più semplice è $\frac{4}{15}$ E ciò pende dal §. 98. Si potrà dunque sempre esprimere un rotto in forma più semplice, qualora i suoi termini siano suscettibili di un solo divisore. E se questo divisore sarà tale che dia due numeri, i quali abbiano per comune misura l' unità, esso si dirà esserne il maggiore.

§. 112. Per trovare il comune divisore di due quantità dividasi la maggiore per la minore, se non vi è resto, la minore sarà il più gran divisore cercato come $\frac{18}{6}$, ec. ma se vi

è resto, si divida la minor quantità per questo resto; se la divisione riesce esatta, il resto è il comune divisore cercato, e così di seguito, perciò il resto, che divide giustamente il resto precedente, è sempre il comune divisore cercato.

Sia da ridursi la frazione $\frac{91}{294}$ all'espressione la più semplice, Dividasi 294 per 91, e trascurando il quoziente 3 si prenda il resto 21 per cui si divida 91. Si lasci il quoziente 4, e si ritenga il resto 7 per cui si divida 21; il quoziente 3 è senza resto, dunque 7 è il comune divisore di $\frac{91}{294}$, pel qual 7 dividendo i due termini della frazione, sarà essa ridotta a $\frac{13}{42}$ sua più semplice espressione. La pruova di ciò si è che due quantità sono divisibili senza resto per un medesimo numero sol quando esse son prodotti esatti di questo numero.

§. 113. Una frazione composta di numeri primi non può ridursi alla più semplice pressione, come $\frac{3}{17}$ ec. ma per l'averso una frazione composta di numeri pari può esser ridotta alla sua metà, terzo, quarto, ec. come la frazione $\frac{128}{432}$ potrà ridursi a $\frac{64}{216}$, a $\frac{32}{108}$, a $\frac{16}{54}$, a $\frac{8}{27}$. Così data la frazione $\frac{90}{300}$ sarà ridotta alla sua metà facendo $\frac{45}{150}$ ed al suo terzo. $\frac{30}{100}$ E la frazione $\frac{80}{100}$ sarà ridotta al quarto $\frac{20}{25}$ Ciò è sufficiente fare sul risultato dell'ultima operazione, tanto nell'addizione che nella sottrazione delle frazioni.

Si osservi che li $\frac{8}{27}$ della frazione ridotta $\frac{128}{432}$ rappresentano i

fattori della frazione, perchè $\frac{8}{27}$ multiplicati per 16 prodotto de' due ultimi numeri della frazione danno $\frac{128}{432}$, d'onde ne segue che l'ultimo o i due ultimi numeri, quando la frazione non è più divisibile, sono il valore reale della frazione, ed ecco la pruova $\frac{27}{8} = a\ 3\frac{3}{8}$, e $\frac{432}{128} = a\ 3\ \frac{48}{128}$ o $\frac{3}{8}$.

Addizione delle frazioni.

§. 114 Se le frazioni da addizionarsi abbiano lo stesso denominatore, si faccia solo l' addizione de' numeratori ed alla loro *somma* si scriva sotto uno de' denominatori. Siano le frazioni $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ da addizionarsi, si aggiunga insieme i numeratori, ed alla *somma* 8 si scriva sotto il denominator comune 5, e si avrà $\frac{8}{5} = 1\ \frac{3}{5}$, proveniente ciò d'aver aggiunto insieme i numeri 1, 3, 4, esprimenti una quinta parte, tre quinte parti, quattro quinte parti dell' unità principale, i di cui rispettivi tutti sono divisi ciascuno in cinque parti eguali.

§. 115. Se le frazioni da addizionarsi hanno diverso denominatore, siccome il denominatore è quello, che disegna la loro specie e grandezza, §. 87, fa d' uopo ridurle prima alla stessa denominazione, vale a dire che rappresentino parti dell' unità similmente divisa. Indi addizionare i numeratori insieme, ed al risultato o *somma* delle frazioni proposte, porre sotto il denominator comune. Date le frazioni $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8}$, le quali si deve addizionare, queste ridotte alla stessa denominazione

diverranno $\frac{40 + 32 + 30}{80}$, ed aggiunti insieme i numeratori si otterrà per *somma* o *tutto* $\frac{102}{80}$, e ridotta $= 1\frac{22}{80}$ o $\frac{11}{40}$.

Potendo ridurre in altro modo le frazioni alla medesima denominazione, come si cennò, per abbreviare l'operazione si faccia.

§. 116. Se debbasi addizionare intieri uniti con delle frazioni, si faccia prima l'addizione delle frazioni, e loro riduzione, se vi ha luogo, affine di conoscere se vi siano intieri da aggiungere alla somma degli intieri, la quale si farà dopo, così: dati l'intieri e le frazioni $5\frac{3}{4} + 7\frac{1}{3}$ si otterrà dalle frazioni addizionate e ridotte $1.\frac{1}{12}$ e 12 dagl' intieri che unito il tutto dà per risultamento dell' operazione $13\frac{1}{12}$.

Dati gl' intieri e le frazioni seguenti da addizionare $6\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$, e $3\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{6}$, queste diverranno primamente $6\frac{5}{8}$, e $3\frac{5}{6}$. Ridotte poi le frazioni allo stesso denominatore si avrà $\frac{30+40}{48} = \frac{70}{48} = 1\frac{22}{48}$ o $\frac{11}{24}$ il che, aggiunto a 9 prodotto degli intieri, risulterà 10 e $\frac{11}{24}$.

§. 117. Dovendo addizionare un intero unito con una frazione si riduca prima l' intero alla stessa denominazione della frazione, §. 101, e poi se ne faccia l' addizione, così 3, e $\frac{4}{5}$ diverranno $\frac{15}{5}$ e $\frac{4}{5} = \frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}$.

Sottrazione delle frazioni.

§. 118. Se la frazione da sottrarsi ha il medesimo deno-

minatore di quella da cui si deve sottrarre, si sottri soltanto quella da questa, ed al residuo le si ponga sotto il denominator comune, così: se fosse da sottrarsi la frazione $\frac{3}{9}$ da $\frac{7}{9}$ scritte le due frazioni come porta la regola, cioè $\frac{7}{9} - \frac{3}{9}$ si troverà essere il residuo $\frac{4}{9}$.

§. 119. Se le frazioni su cui cade la sottrazione hanno diversi denominatori, siccome non si può paragonare che quantità della medesima specie per conoscerne la differenza, fa d'uopo prima ridurle alla stessa denominazione, affinchè le rappresentino, e quindi fare come sopra. Siano le frazioni $\frac{7}{9} - \frac{3}{5}$, esse primamente diverranno $\frac{35}{45} - \frac{27}{45}$ e sottratto il secondo denominatore dal primo, esprimenti parti frazionarie della stessa specie, indicata dal medesimo denominatore, cioè 27 da 35, si otterrà 8 per resto, a cui posto sotto il comune denominatore 45, si avrà per residuo $\frac{8}{45}$, che sarà la differenza cercata delle due frazioni. Questi $\frac{8}{45}$ è ciò che giustamente chiamasi residuo, come si è detto, che si ottiene, quando da un numero maggiore se ne toglie uno minore, ma non può mai aver luogo, quando da un numero se ne toglie uno eguale, vale a dire, allorchè si paga il debito intero.

§. 120. Se la frazione da sottrarsi fosse maggiore dell'altra, o sia che essendo già ridotte le frazioni alla stessa denominazione, il numeratore della frazione da sottrarsi fosse maggiore dell'altro, la sottrazione non può eseguirsi, ma soltanto indicarsi, p. e. non potendo sottrarre $\frac{5}{6}$ da $\frac{4}{6}$ si potrà solo fare indicando questo resto $\frac{4-5}{6}$, il che spetta poi all'al-

gebra a darne il preciso significato, parlando delle quantità negative.

§. 121. Se si dovesse fare la sottrazione delle frazioni $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$, si faccia prima di ciascuna delle due quantità una sola frazione, e con questa operazione si formerà di ciascuna delle quantità proposte una sola frazione di $\frac{31}{20}$ della prima e $-\frac{7}{6}$ della seconda, le quali ridotte alla stessa denominazione diverranno $\frac{186}{120} - \frac{140}{120}$, indi trovata la differenza de' numeratori vi si scriva sotto il denominator comune, e si avrà $\frac{46}{120}$ o $\frac{23}{60}$.

§. 122. Se vi fossero degli intieri uniti con le frazioni, si faccia prima la sottrazione delle frazioni, perchè nel caso che la frazione da sottrarsi fosse maggiore, possa prendersi un' unità ad imprestito dall'intiero, ed unirla alla frazione minore, facendone così una frazione maggiore dell'altra, come; dovendo sottrarre 5 e $\frac{5}{8}$ da 8 e $\frac{3}{8}$ o sia $8\frac{3}{8} - 5$ e $\frac{5}{8}$ si deve prendere da 8 un' unità, che aggiunta ai $\frac{3}{8}$ dà $\frac{11}{8}$, da cui sottratti i $\frac{5}{8}$ si otterrà per residuo $\frac{6}{8}$. Facendo poi la sottrazione degli intieri, avvertasi che 8 non vale che 7 da cui tolto 5 rimane 2, per cui il residuo è $2\frac{6}{8}$.

§. 123. Se poi l' intero con frazione da sottrarsi da un intero con frazione è minore sì l' uno che l' altra si riduca

l' uno e l' altro degl' intieri con la rispettiva frazione in una sola frazione, §. 102., e quindi si operi su queste come si è fatto sopra. Così dovendo sottrarre $5\frac{2}{3}$ da $8\frac{3}{4}$ scrivasi prima $8\frac{3}{4} - 5\frac{2}{3}$, e ridotta ciascuna in una sola frazione si avrà $\frac{35}{4} - \frac{17}{3}$, e dando loro lo stesso denominatore diverranno $\frac{105}{12} - \frac{68}{12} = \frac{37}{12} = 3\ \frac{1}{12}$.

§. 124. Nella sottrazione delle frazioni può talvolta risultare per resto un numero intero; ma ciò non può mai accadere, quando i due numeri dati sono vere frazioni, così $\frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$.

Si rifletta per ultimo che siccome il denominatore di un rotto rappresenta il numero delle parti in cui l' unità è divisa, §. 84, così, se siasi diviso due unità simili nel medesimo numero di parti, queste si trovano identiche per cui la loro somma, o differenza consiste solo nel prendere la somma, o la differenza del numero delle parti delle prime o vero delle seconde, il che si è veduto sopra.

Multiplica delle frazioni.

§. 125. Per multiplicare le frazioni si deve prendere tante volte l' una, quante parti frazionarie contiene l' altra o sia prendere dal multiplicando ciò che esprime il multiplicatore, per effettuir ciò si multiplichi fra loro i numeratori, ed i denominatori il prodotto de' primi forma il numeratore, quello de' secondi il denominatore della nuova frazione, così: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ prodotto cercato.

Per multiplicare le frazioni è sufficiente ancora dividere il prodotto de' numeratori per quello de' denominatori, in fatti $\frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. La ragione poi della operazione indicata dal primo esempio è la seguente: multiplicare $\frac{3}{4}$ per 2 è lo stesso che prendere due volte le tre parti del tutto diviso in quattro parti, perciò il prodotto di $\frac{3}{4}$ per 2 è eguale a $\frac{6}{4}$. Il multiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$ è lo stesso che multiplicare $\frac{3}{4}$ per la terza parte di 2, essendo $\frac{2}{3}$ il terzo di due intieri, per conseguenza il prodòtto di $\frac{3}{4}$ multiplicato per $\frac{2}{3}$ deve essere necessariamente la terza parte di $\frac{6}{4}$, vale a dire $\frac{6}{12}$ o sia $\frac{1}{2}$. Dunque in generale multiplicare un rotto per un altro significa prendere tante volte il multiplicando per quante unità si contengono nel multiplicatore, così: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ altro non dice che prendere $\frac{2}{3}$ tante volte, quante unità si contengono in $\frac{1}{2}$, or l'unità è contenuta soltanto una mezza volta in un mezzo, dunque si vede prendere $\frac{2}{3}$ una mezza volta, per cui $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; così: $\frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{1}{3}$.

Dagli esempli chiaro scorgesi, che il prodotto di due frazioni è sempre minore di ciaschedùna di esse, poichè se si multiplica una frazione per l'unità, si ha la stessa frazione, multiplicandosi per una frazione minore dell'unità, si avrà un prodotto minore di essa, come si è osservato sopra.

§. 126. Qualora poi il numeratore e 'l denominatore di una

delle due frazioni da multiplicare fra loro fossero tali che il numeratore fosse divisore esatto del denominatore dell' altra, e che il denominatore fosse pure divisore esatto del numeratore dell' altra, facendo queste due operazioni, si avrà egualmente il prodotto cercato, così date le frazioni da multiplicarsi $\frac{16}{21} \times \frac{7}{4}$ in cui il 7, ed il 4 sono divisori esatti del 21, e del 16, operando si avrà $\frac{16}{21} : \frac{4}{7} = \frac{4}{3}$. Ed in fatti $\frac{16}{21} \times \frac{7}{4} = \frac{112}{84} = \frac{56}{42} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$.
E nel caso che non si possa avere un numero intiero per quoziente se non che da una sola delle due divisioni, si faccia questa sola, e l' altra operazione si farà per la multiplica, così nelle due frazioni $\frac{2}{6} \times \frac{3}{5}$, in cui il solo numeratore 3 della seconda frazione è divisore esatto del denominatore 6 della prima, si esegua soltanto la divisione di questo, e poi la multiplica degli altri due, e si otterrà il prodotto cercato, come nelle frazioni $\frac{2}{6} \times \frac{3}{5}$ dividendo 6 per 3 si avrà 2, indi multiplicati gli altri due, o sia $2 \times 5 = 10$, si sarà ottenuto per prodotto $\frac{2}{10}$, valore ritratto dalla multiplica delle due frazioni, ed è così perchè $\frac{2}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{30} = \frac{2}{10}$.

§. 127. Se poi il numeratore di una delle due frazioni è eguale al denominatore dell' altra, si avrà il prodotto senza veruna multiplicazione, tralasciando i due numeri eguali, e scrivendo in frazione gli altri due. Sieno le frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$ si scriverà soltanto $\frac{2}{5}$, perchè essendo $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$ si vede chiaro che questo prodotto ha per fattore comune de' suoi due termini il 3, e che divisi per 3 si riduce a $\frac{2}{5}$.

§. 128. E se le due frazioni saranno tali che il numeratore di ciascheduna di esse sia eguale al denominatore dell'altra, allora il prodotto sarà rappresentato da una frazione di termini eguali, e sarà per conseguenza eguale ad *uno*, p. es. siano le frazioni $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$ il prodotto sarà $\frac{5}{5} = 1$.

§. 129. Da ciò si deduce che il numero 1 si può considerare come un prodotto in molte maniere diverse, e che delle due frazioni una sola dovrà esser vera, perchè non può mai risultare *uno* dalla multiplica di due vere frazioni, come già si à cennato.

§. 130 Si multiplica una frazione per un'intero multiplicando per questo il numeratore della frazione, così $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$ $= 1 \frac{1}{3}$.

§. 131. Se devesi multiplicare un'intero per una frazione è lo stesso, così: $4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ $2 \frac{2}{3}$.

§. 132. Si multiplica un numero intero accompagnato da frazione, per un numero intero, o un intero soltanto per un numero intero accompagnato da frazione, riducendo l'intero accompagnato da frazione entrambi in frazione, così $2\frac{2}{9}$ da multiplicarsi per $4 = \frac{20}{9} \times 4 = \frac{80}{9} = 8\ \frac{8}{9}$.

Lo stesso prodotto si ottiene multiplicando prima l'intero 2 per 4, indi il numeratore della frazione $\frac{2}{9}$ per 4, il primo dà 8, il secondo $\frac{8}{9}$.

§. 133. Si multiplica una frazione per un intero con frazione, riducendo l'intero e la frazione in una sola frazione, co-

si $\frac{3}{5} \times 4, \frac{3}{4}$ o $\frac{3}{5} \times \frac{19}{4} = \frac{57}{20} = 2\frac{17}{20}$; come del pari $5\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ o $\frac{17}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{51}{12} = 4\frac{3}{12}$

§. 134. E finalmente se abbiasi da multiplicare un intero con frazione per un intero con frazione, si riduca l' intero e la frazione da ambe le parti in una sola frazione, indi si operi secondo la regola: dati gl' intieri e le frazioni $5\frac{3}{4}$ e $3\frac{1}{2}$ queste sono primamente eguali a $\frac{23}{4}$ e $\frac{7}{2} = \frac{161}{8} = 20\frac{1}{8}$.

§. 135. Si multiplica ancora un intiero ed una frazione per un intiero con frazione, operando prima su gl' intieri, indi prendendo dei rispettivi intieri quella parte, che la frazione rappresenta, così volendo multiplicare $4\frac{1}{4}$, si avrà per prodotto de' due interi 8; indi si dica la metà di 4 è 2, che si segnerà sotto l' 8. In seguito la quarta parte di 2 è $\frac{1}{2}$ ed il quarto di $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{8}$, e la somma totale è $10\frac{5}{8}$. Per meglio intender questa operazione si riscontri coll' esempio §. 147.

$$\begin{array}{l} 4\frac{1}{4} \\ \times \\ 2\frac{1}{2} \\ \hline 8 \\ 2 \\ 0\ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{8} \\ \hline 10.\ \ \frac{5}{8} \end{array}$$

Riduzione de' rotti di rotti.

§. 136. La riduzione de' rotti di rotti appartiene alla multiplica, e non già alla divisione, come a prima vista può sembrare. In fatti prendere $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ è forse dividere $\frac{3}{4}$ per due terzi? no, anzi è multiplicarli, §. 125. Se si dovesse pren-

dere il $\frac{5}{3}$ di $\frac{3}{4}$ si dovrebbe multiplicare uno per 3 numeratori e 3 per 4 denominatori, e si otterrebbe $\frac{3}{12}$, §. 125 ma siccome fa d'uopo prendere $\frac{2}{3}$ si deve raddoppiare quello, che si è trovato, cioè multiplicare il numeratore 2 pel numeratore 3, perciò $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ sono eguali a $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

§. 137. La parte o le parti, che si prende di una frazione semplice divisa in un determinato numero di parti, o dell'unità stessa suddivisa, si chiama frazione di frazione, come $\frac{1}{2} \Big| \frac{2}{3}$ il che vale un mezzo di due terzi cioè $\frac{1}{3}$. Per aver dunque il valore della frazione di frazione si deve multiplicare i numeratori ed i denominatori fra loro, perchè l'espressione di una frazione di frazione non è che prender l'una per quante parti dell'unità contiene l'altra.

§. 138. Per valutare la frazione di frazione, si opera nella stessa maniera come sopra, o sia si può ridurle ad una sola espressione, cioè ad una sola frazione così: volendo il valore di $\frac{1}{2} \Big| \frac{2}{3} \Big| \frac{3}{4}$ si multiplichi i numeratori ed i denominatori insieme, e si otterrà $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ il che vuol significare che si deve prendere un mezzo di due terzi di tre quarti. La pruova si è che tre quarti di una cosa divisa in dodici parti eguali sono nove, due terzi di nove sono sei, la metà di sei è tre, e tre è la quarta parte di dodici.

Divisione delle frazioni

§. 139. La divisione delle frazioni consiste nella ricerca di un quoziente il quale ci faccia conoscere quante volte una frazione si contiene in un' altra. Questa divisione si fa multiplicando il numeratore della prima frazione pel denominatore della seconda, e l' numeratore della seconda frazione pel denominatore della prima; facendo attenzione di mettere per denominatore della nuova frazione il prodotto del numeratore della frazione divisore pel denominatore della frazione dividente, come: $\frac{5}{6}$: $\frac{1}{6} = \frac{30}{6} = 5$, quoziente che indica quante volte il divisore $\frac{1}{6}$ si contiene in $\frac{5}{6}$; del pari $\frac{3}{4} : \frac{2}{8} = \frac{24}{8} = 3$, vale a di re che $\frac{2}{8}$ si contengono tre volte in $\frac{3}{4}$ o sia in $\frac{6}{8}$. La divisione può farsi ancora rovesciando i termini della frazione divisore e multiplicare poi i numeratori ed i denominatori insieme.

§. 140. L'esposto metodo di dividere i rotti per li rotti si spiega in tal modo: avendo da dividere $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{5}$ al certo il quoto è $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$, ma una frazione mantiene lo stesso valore multiplicandosi per lo stesso numero tanto il numeratore o sia dividendo, quanto il denominatore o sia divisore, perciò in questo caso $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3 \times 4}{4}}{\frac{2 \times 4}{5}} = \frac{3}{\frac{2 \times 4}{5}} = \frac{3 \times 5}{\frac{2 \times 4 \times 5}{5}}$

$= \frac{3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{15}{8}$ vale a dire che il quoto si ha realmente dal prodotto del numeratore del dividendo pel denominatore del divisore, e dal prodotto del numeratore del divisore pel denominatore del dividendo, che dà il denominatore dello stesso quoto.

§. 141. Nella multiplica de' rotti accade che il prodotto sia più piccolo del multiplicando, così: $2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}$. Al contrario nella divisione il quoziente riesce maggiore del dividendo, come, $2 : \frac{2}{3} = \frac{6}{2} = 3$. Ciò deve necessariamente essere sempre che la frazione, che rappresenta il multiplicatore o il divisore è più piccola dell'unità, perchè allora il suo numeratore è più piccolo del suo denominatore; quando la frazione resta diretta nella multiplica è il più piccolo termine; che multiplica la prima frazione, mentre il più grande la divide. Quando al contrario si fa la divisione è il maggior termine che multiplica la prima frazione, mentre il più piccolo la divide, guadagna dunque più di quello, che perde, e per conseguenza diviene maggiore.

§. 142. Per dividere un intero per una frazione si multiplichi l'intero postovi sotto l'unità, pel denominatore della frazione, il prodotto sarà il numeratore della nuova frazione, che avrà per denominatore il numeratore della frazione, così: $\frac{7}{1} : \frac{3}{4} = \frac{28}{3} = 9 \frac{1}{3}$, significando che i $\frac{3}{4}$ si contengono nove volte ed un terzo in 7 intieri.

§. 143. Se poi si ha da dividere una frazione per un intero, in questo caso non appartiene alla divisione, giacchè non può mai dividersi un numero minore per uno maggiore; ma bensì vuol significare che si deve *prender ciò che rappresen-*

ta l' unità divisa per l' intero proposto, così: $\frac{1}{4}$: 3 scrivendo, come si è letto, si avrà $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{3}$, e vuol dire che si deve prendere il terzo di un quarto, il che appartiene alla multiplica; multiplicati pertanto i numeratori, ed i denominatori, §. 135, si otterrà $\frac{1}{12}$. Or siccome di una cosa divisa in dodici parti eguali il quarto è un terzo, e di questo il terzo è 1; dunque dividere $\frac{1}{4}$: 3 vuol denotare realmente prendere il terzo di un quarto, cioè $\frac{1}{12}$, come si è ottenuto. Quando è possibile, si divida il numeratore della frazione per gl' intieri, e si dia al quoziente il denominatore della frazione; così: $\frac{8}{12} : 4 = \frac{2}{12}$.

§. 144. Dovendosi dividere un intero con frazione per un intero con frazione si ridurrà sì l' uno che l' altro degl' intieri colla rispettiva frazione ad una sola frazione, e quindi si farà la multiplica, come si è prescritto, §. 139; siano gl' interi e le frazioni 5 $\frac{3}{4}$: 3 $\frac{2}{3}$ ridotte in due frazioni diverranno $\frac{23}{4} : \frac{11}{3} = \frac{69}{44} = 1 \frac{25}{44}$.

§. 145. E finalmente per ridurre i rotti in intieri non si ha che multiplicare il numeratore di un rotto pel denominatore dell' altro, così: $\frac{2}{3}$ più $\frac{3}{4}$ = 8 + 9, il che fa conoscere più facilmente qual sia delle due la frazione di maggior valore.

Si avverta che se nell' operare su i rotti s' incontrerà rotti di rotti, si dovrà prima ridurre tali rotti a rotti semplici, e poscia fare l' operazione.

Applicazione della multiplica degl' intieri, e rotti.

§. 146. Volendo sapere quanto è il costo di cantaja $54\ \frac{3}{5}$ di una merce, che vale duc. 24 il cantaio, si rifletta prima che chi ha dato 54 cantaja della data merce, esiger deve cinquantaquattro volte ventiquattro ducati, e di più avendo dati $\frac{3}{5}$ di cantaio richiede pure tre quinte parti di ventiquattro ducati, perciò si faccia $54 \times 24 = 1296$, indi $\frac{3}{5} \times 24 = \frac{72}{5} = 14\ \frac{2}{5}$ che in tutto forma duc. 1310, $\frac{2}{5}$ o grana 40. Se poi vogliasi sapere l' importo di 54 cantaja e rotola 60 in vece de' tre quinti, si faccia prima $54 \times 24 = 1296$, indi supponendo le 60 rotola sessanta cantaja, facciasi $24 \times 60 = 1440$, ma per esser questo prodotto cento volte maggior del giusto, giacchè si è chiamato cento rotola, fa d' uopo togliere le ultime due cifre a destra e si otterrà dall' ultimo prodotto duc. 14, e 40 grana come sopra. La stessa operazione serve a valutare ogni sorta di merce in pesi differenti, e per ogni sorta di costo in moneta differente.

§. 147. Si voglia ora il costo di cantaja $4\ \frac{1}{4}$ di una merce, che vale duc. 2, e 50 il cantaio; per ottener ciò si ragioni a norma del §. 135., chi ha dato cantaia 4 deve avere quattro volte il valore di un cantaio, perciò si dica; due volte 4 fanno 8 notando l' ottenuto al suo luogo, indi per le 50 grana si prenda la metà delle quattro cantaia, che è 2, scrivendolo al suo luogo, per essere cinquanta la metà di cento, e si sarà ottenuto il valore delle quattro cantaia. Chi poi ha dato un quarto di cantaio deve avere il quarto del valore di un cantaio; si dica adunque la quarta parte di due ducati

è un mezzo ducato o 50 grani, la quarta parte di 50 è 12 $\frac{1}{2}$, segnando il tutto al suo posto, e fatta la somma si avrà duc. 10. 62., $\frac{1}{2}$ valore delle cantaia 4 $\frac{1}{4}$, come vedesi nell' esemplo :

Cantaja	4 $\frac{1}{4}$
a duc.	2. 50
	8. —
	2. —
	50
	— 12 $\frac{1}{2}$
Duc.	10. 62. $\frac{1}{2}$ — 0

Si noti di non cadere nell' errore di prendere il $\frac{1}{4}$ solamente nel 2, come si fa, ma ancora nel 50, poichè allora si otterrebbe per somma duc. 10. 50 soltanto.

§. 148. Volendo ottenere l'importo di canne 3 e palmi 5 di panno a duc. 12 la canna si faccia $3 \times 12 = 36$; essendo poi li cinque palmi $\frac{5}{8}$ di una canna, si faccia $\frac{5}{8} \times 12 = \frac{60}{8} = 7 \frac{4}{8}$ o grana 50, §. 95.

§. 149. Si voglia sapere il costo di misure 17 di grano o di altro genere a ducati 2 e $\frac{3}{5}$ la misura, od a duc. 2 e grana 60, si operi come al §. 146. e si otterrà il costo del primo in duc. 44 $\frac{1}{5}$; del secondo in duc. 44 e grana 20.

§. 150. Si domanda quanto costano misure 7 $\frac{3}{5}$ di grano o

d' altro genere, che vale duc. $3\frac{3}{4}$ la misura? eccone il modo: $3\frac{3}{4} \times 7$, o $\frac{15}{4} \times 7 = \frac{105}{4} =$ duc. $26\frac{1}{4}$ o 25 grani, indi $\frac{3}{5} \times 3\frac{3}{4}$ o $\frac{3}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{45}{20} = 2\frac{5}{20}$ o 25 grani, perciò il costo totale è di duc. 28 e grana 50. Se la stessa dimanda fosse fatta in questi termini: quanto costano misure $7\frac{3}{5}$ di grano od altro a duc. 3, 75 grana la misura? darebbe lo stesso risultamento, perchè $7\frac{3}{5}$ o $\frac{38}{5} \times 375 = \frac{14250}{5} = 28$, 50 come sopra.

§. 151. Volendo il costo di $\frac{3}{4}$ di un palmo di una tela, che vale duc. $2\frac{1}{4}$ la canna o grana 225, si rifletta che $\frac{3}{4}$ di palmo sono $\frac{3}{4}\left|\frac{1}{8}\right.$ o $\frac{3}{32}$ §. 137., perciò si faccia $\frac{3}{32} \times 225 = \frac{675}{32} =$ a grana $21\frac{3}{32}$ di grano, dunque i tre quarti di palmo valgono grana 21 e $\frac{3}{32}$ di grano.

La stessa operazione è applicabile a qualunque altra misura o peso.

Applicazione della divisione degli intieri e rotti.

§. 152. Conoscendo il valor totale di un numero di misure di una certa merce, si conoscerà pure il costo di una o più misure per mezzo della divisione, come: sapendo che canne 8 di panno hanno costato duc. 60, e volendo sapere quanto ritiene la canna, si faccia $\frac{60}{8} = 7\frac{4}{8}$, o $\frac{1}{2}$ cioè duc. 7, e grana

50 la canna. Volendo poi sapere il costo di una canna di panno, mentre canne $6\frac{3}{8}$ hanno costato duc. 44, si faccia 44 : $6\frac{3}{8}$ o 44 : $\frac{51}{8}$ = a $\frac{352}{51}$ a duc. 6. e $\frac{46}{51}$ valore di una canna.

§. 153. Si dimanda l'importo di una libbra di un dato genere, di cui libbre 8 e once 5 hanno costato duc. 12, e grana 14. Si riduca le otto libbre in once; ed unitevi le 5 once si avrà once $\frac{101}{12}$. Si riduca di poi li duc. 12, 14 in grani, quali fanno 1214, e facciasi 1214 : $\frac{101}{12}$ o 1214 $\times \frac{12}{101}$ §. 139. = $\frac{14568}{101}$ = a duc. 1 44. $\frac{24}{101}$, perciò riviene la libbra duc. 1 44. e un quarto circa. E volendo sapere il costo di un'oncia e mezzo di qualunque genere, del valore di 50 carlini la libbra, si faccia 50 : 12 = a grana 41 e cavalli 8, e si sarà ottenuto il prezzo di un'oncia; prendendo di poi la metà si avrà il valore totale dell'oncia e mezzo in grana 62 e cavalli 6.

§. 154. Vogliasi sapere il costo di palmi 7 di un panno, che vale duc. 13. e grana 50 la canna. Si consideri in primo luogo i 7 palmi come $\frac{7}{8}$ di canna e perciò il prezzo di questi deve essere $\frac{7}{8}$ di duc. 13, 50. A tale effetto si riduca i ducati in grani, ed uniti ai 50 si avrà 1350 grani, si multiplichi questi per 7 ed il risultato si divida per 8, 1350 $\times$ 7 = $\frac{9050}{8}$ = a duc. 11. 81. $\frac{2}{8}$ valore de' 7 palmi cercato. Lo stesso prezzo si ottiene dividendo il costo di una canna per 8, e trovato il valore di un palmo multiplicarlo per 7; poichè duc. 13, 50 costo di una canna sono grani 1350. che divisi per 8 danno per quoto duc. 1. 68. 9. e multiplicati per 7 danno duc. 11. 81. 3. equivalente all'altro.

§. 155. Volendo il costo di once 7 di palmo di un panno, che vale duc. 13, 2, 10 la canna, si riduca i ducati in grani, le grana in cavalli, e operato come sopra si otterrà pel costo delle 7 once duc. 9. 11. $\frac{4}{12}$, In simil guisa trovato il prezzo di un'oncia dividendo per 12, e multiplicatolo per 7, si avrà lo stesso.

§. 156. Vogliasi sapere il valore di $\frac{6}{12}$ di canna si multiplichi il numeratore 6 per 8 ed il prodotto 48 si divida per 12 e si otterrà 6 per quoziente, a cui dato il denominatore 12, si avrà $\frac{6}{12}$ equivalente a palmi 4 o mezza canna, ed è così, perchè 6 è la metà di dodici. In simil modo si troverà il valore di $\frac{5}{11}$ di canna ec. in palmi 3, $\frac{7}{11}$.
Sembra pertanto che questa applicazione sì della multiplica che della divisione degl'intieri e rotti valga se non in tutto almeno in parte a conoscere in qual modo si trovi facilmente il quarto termine, senza ricorrere sin d'ora alla regola di *tre* alquanto ardua per la gioventù.

Frazioni decimali.

§. 157. Consta da principii della numerazione che ogni zero posto alla destra dell'unità l'augumenta di dieci, ottenendo così una serie crescente in ragion decupla di decine, centinaia, migliaia, ec. Or prendendo detta serie in senso opposto, supponendo che ogni zero posto a sinistra dell'unità la diminuisca, come il fa, di dieci; si otterrà una serie decrescente in ragione suddecupla di decime, centesime, millesime parti dell'unità stessa. Queste parti formano appunto le frazioni decimali. E come che esse sono parti dell'unità principale divisa in 10, 100, 1000 parti eguali, si può esprimerle nella stessa guisa delle frazioni ordinarie, così: $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{1000}$ ec. che si profferiscono per convenzione *una decima*, due *centesime*, tre *millesime*, ec. E co-

me, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ contrasegnano parti decime dell' unità, così $\frac{5}{100}$, $\frac{10}{1000}$ esprimono rispettivamente parti centesime, millesime dell' unità suddivisa, che perciò $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ sono decimali semplici, e $\frac{5}{100}$, $\frac{10}{1000}$ sono decimali di decimali. In queste frazioni non di rado si sopprime il denominatore, ed in sua vece si mette innanzi al numeratore un punto od una virgola, così in luogo di $\frac{8}{10}$ si scrive .8, ed in vece di $\frac{46}{100}$ .46. È evidente che il punto vi stà per la mancanza dell' unità, quindi è che la prima cifra dopo la virgola denota le decime, la seconda le centesime, la terza le millesime, la quarta le decime millesime ec., e mancando qualcheduno de' numeri decimali intermedi fa d' uopo supplirlo collo zero, come si avvertì pel calcolo ordinario, §. 16. così che se uno profferisse 3 interi, 4 decimi, e 5 millesimi, mancandovi i centesimi dovrebbe supplire scrivendo collo *zero* e fare 3. 405, vale a dire: tre interi e quattrocento cinque millesimi. Si può ancora esprimere le frazioni decimali in altro modo, mettendo sopra loro delle lineette, significando una decimi, due centesimi, tre millesimi, come $1.\overset{\prime}{3}\,\overset{\prime\prime}{3}\,\overset{\prime\prime\prime}{8}$.

§. 158. Se nel numeratore di un rotto decimale vi saranno tante cifre, quanti sono gli zeri del denominatore, la prima cifra del numeratore, da sinistra a destra, denoterà parti decime dell' unità, la seconda centesime, la terza millesime, la

quarta decime millesime, ec. per conseguenza in ogni numero composto, le cifre crescendo per decine da destra a sinistra, disegnerà la prima parti dinotate dal denominatore, la seconda decine di sì fatte parti, la terza centinaia, ec. così: $\frac{234}{1000}$ equivale a due cento trenta quattro millesime.

§. 159. Al contrario se vi saranno più cifre nel numeratore che zeri nel denominatore, le cifre di più dinoteranno interi, così il rotto decimale $\frac{34}{10}$ equivale a 3, $\frac{4}{10}$.

§. 160. Lorchè non vi saranno intieri innanzi al rotto decimale, si mette uno zero prima del punto, perciò in vece di scrivere 5, si farà o . 5, esprimendo lo zero innanzi de' decimali la sola loro caratteristica.

§. 161. Se poi il numero de' zeri del denominatore sorpasserà quello delle cifre del numeratore di una, di due, di tre, ec. unità, in tal caso mancheranno nel rotto decimale le parti decime, o le centesime, o le millesime, ec. così $\frac{1}{100}$ equivale a o . 01. così $\frac{2}{1000}$ equivale a o . 002.

§. 162. I zeri pertanto posti alla sinistra de' decimali ne diminuiscono il valore di cento, mille, ec. così il decimale o . 32 è maggiore di o . 032, e molto più di o . 0032, e di o . 00032, ec., al contrario posti alla dritta non significano nulla, così: o . 5000 = o . 5, non essendo che la stessa unità divisa in più parti.

§. 163. Per ben profferire qualunque decimale fa d'uopo supporvi un denominatore con tanti zeri, quante sono le cifre del rotto da profferirsi, onde il rotto o . 345. si enuncia: trecento quarantacinque millesime, essendo il denominatore 1000 da supporvi.

§. 164. Le cifre decimali crescendo per ragione di luogo da destra a sinistra per decine, e continuandosi una si fatta ragione di crescere andando dalli decimali agli intieri, è chiaro che si può calcolare, come intieri i soli decimali, e gl' inintieri uniti coi decimali; giacchè dall' ultimo decimale al maggior numero dell' intero unitovi non vi si passa che gradatamente per numeri crescenti in ragion decupla, e coll' ordine ordinario di unità, decine, centinaia ec, quindi è che si opera su le frazioni decimali egualmente che su gl' intieri. La sola avvertenza, che richiedesi è di situare il punto, che deve separare gl' intieri dalle decimali, qual punto nella somma, e sottrazione va posto nella stessa colonna degli altri, i quali debbono essere tutti in colonna verticale.

Addizione de' decimali.

§. 165. Per addizionare più frazioni decimali, unite anche con intieri, non si ha che eseguire lo stesso andamento stabilito per li numeri interi, vale a dire di porre le unità, le decine, le centinaia, ec. sotto le decine, centinaia, ec. Similmente coll' ist essoordine disporre le decime, le centesime, le millesime, ec. di decimali, e far poi l' addizione nella maniera già prescritta, mettendo la virgola nella somma a sinistra del carattere delle decime, come nel seguente esemplo:

```
        35 . 7802
         1 . 053
         0 . 426
        ---------
Somma   37 . 2592
```

La di cui somma equivale a trentasette intieri, e due mila cinque cento novanta due decime millesime.

Perchè si possa più facilmente fare l' operazione, e sia

meno soggetta ad errori, si ponga degli zeri in luogo delle parti decimali mancanti, e così si pratichi in tutti i casi.

Sottrazione de' decimali.

§. 166. Per sottrarre i decimali o soli od uniti ad interi si deve disporre le quantità da sottrarsi nel modo istesso, come se fossero intieri:

```
78.3020   minuendo
 9.5332   minuitore
---------
68.7688
```

§. 167. Per facilitare la sottrazione de' rotti decimali 4. 63, e o. 3697. si aggiunga due zeri alla destra del minuendo 4. 63., come si è detto, trasformandolo nell'altro 4. 6300 di egual valore, operando su di questi, come su gl' intieri.

Multiplica de' decimali.

§. 168. Se i numeri da multiplicarsi siano decimali semplici o decimali uniti con interi, si esegue l' operazione come quella degli intieri, senza badare alla posizione de' punti; ma terminata poi l' operazione si deve separare col punto tante cifre a destra, quante decimali sono nel multiplicando, e nel multiplicatore, dando queste un prodotto maggiore del vero.

```
  34.632.      multiplicando.
   1.523.      multiplicatore.
  ----------
    103896
   69264
 173160
34632
  ----------
52.744536      prodotto totale.
```

Divisione de' decimali.

§. 169. Dovendosi dividere un numero per un altro o che siano tutti e due decimali, o uniti agl' intieri, o uno intero e l' altro decimale, si fa pure la divisione come quella degli intieri; ma terminata l' operazione fa d' uopo separare nel quoziente, alterato dalla soppressione del punto, tante cifre a destra quanta è la differenza tra le decimali del dividendo e quelle del divisore, così nell' esemplo:

§. 170. Se nel divisore vi sono più decimali che nel dividendo, si deve aggiungere alle decimali del dividendo tanti zeri sino a che le decimali del dividendo contengano maggior numero di cifre di quelle del divisore, così: dovendo dividere

dere 49. 1. per 20. 074 aggiungasi al dividendo quattro zeri, e si avrà:

Dividendo

```
49.10000     Divisore
40148        | 20.074
---------    ----------------
=89520       | 2.44 11944/20074 quoto
 80296
---------
= 92240
  80296
---------
  11944
```

Avvertasi che in questo esemplo ed in altri simili potrebbe continuarsi la divisione, aggiungendo de' zeri al dividendo, onde ottenere un più esatto quoziente, finchè l' ultimo residuo differisca tanto poco dall' unità, che sia trascurabile.

§. 171. Le frazioni decimali recano gran vantaggio alle matematiche. Esse sono utilissime per ottenere il quoziente quasi esatto di due numeri primi, per l' approssimazione delle radici, e per la costruzione delle tavole trigonometriche.

Trasformazioni de' decimali.

§. 172. Si può trasformare i rotti decimali, come i rotti ordinari, in altri dello stesso valore. Siccome il valore di un rotto, come o . 4 non cangia valore, se il suo numeratore o denominatore sono multiplicati per uno stesso numero, e se 10, 100, 1000 serve di multiplicatore, aggiungendo uno, due, tre zeri alla destra di 4, così si farà subito la multiplica del numeratore e del denominatore del rotto decimale o . 4 scrivendo o . 40; e o . 400; e o . 4000 eguale ciascuno, o . 4 §. 161: per cui si può sopprimere gli zeri finali di un rotto decimale senza alterarne il valore, ma non si deve sopprimere

altre cifre, perchè allora il rotto scemerebbe di valore, come se nel rotto o . 683. si togliesse il 3, si toglierebbe tre millesime. Questa diminuzione è meno sensibile, quando le cifre son molte, così nel rotto : o . 68ooo3 non sarebbe diminuito

il valore, togliendo il 3, che di $\frac{3}{1000000}$, questa piccola diminuzione, che ne risulta, si può compensare coll'aggiungere. un'unità all'ultima cifra delle rimanenti, dopo d'averne tolte tre o quattro, come trascurando i quattro ultimi decimali di o . 12346889, si dovrà scriver poi : o . 1235.

§. 173. Ne' calcoli ordinari raramente servono più di sei decimali, così si può prendere senza error sensibile 15. 3, per 15. 3049; ma se 15. 3 dovesse esser multiplicato per numeri molto grandi come : 84 . 76, la soppressione in questo caso de' decimali cagionerebbe un errore di alcuni intieri.

§. 174. La principale utilità de' decimali consiste nell'accostarsi sempre più all'eguaglianza con le spressioni numeriche, di cui non può aversi il valore rigoroso, e questo si ottiene coll'aggiungere uno o più zeri ad ogni resto di divisione, onde poterla continuare, ed avere il più esatto possibile quoziente.

§. 175. È facile rilevare la relazione, che passa tra una frazione ordinaria ed una frazione decimale, perchè l'una possa trasformarsi nell'altra. Primamente si può trasformare i rotti ordinarii in decimali o perfettamente eguali o approssimanti quanto si vuole, mettendo uno o più zeri al numeratore,

dividendolo poi pel denominatore, p. e. $\frac{1}{2}$ si trasforma

in o . 5 essendo $\frac{10}{2} = 5$ esattamente, ma $\frac{1}{3}$ non è suscettibile

che di una approssimazione.

§. 176. Per ridurre un rotto ordinario in decimale di un

dato grado, si aggiunga a destra del numeratore del rotto dato tanti zeri, quanti ne contiene il grado decimale, cui si vuole ridurre, e si divida poi il numero, che ne risulta pel denominatore del rotto dato, il quoto sarà il decimale cercato, così: dato il rotto $\frac{3}{5}$ da ridursi in decimi, si avrà aggiungendo uno zero al numeratore $\frac{30}{5} = 0 . 6$.

§. 177. Secondamente si può ridurre un decimale in un rotto ordinario, che abbia un qualsivoglia denominatore, e ciò col multiplicare il rotto pel denominatore dato, gl' intieri del prodotto rappresentano il numeratore del rotto cercato, ed i decimali, in caso che ve ne siano, denoteranno una parte dell' unità frazionaria del rotto ottenuto, così vogliasi ridurre o . 45 di un giorno a ore, cioè in 24.me di giorno. Siccome o . 45 corrisponde al rotto ordinario $\frac{45}{100}$, perciò questa operazione si dovrà effettuare in simil modo che la riduzione di un rotto in un altro di un dato denominatore, vale a dire multiplicando 45 per 24, e dividendo il prodotto per 100, il che darà 10, 80, sarà dunque 10 il quoziente, §. 70, ed 80 il residuo, quanto a dire che il rotto proposto o . 45 di un giorno corrisponde a $\frac{10}{24}$ del giorno istesso con più $\frac{80}{100}$ di un' ora quali si potrà pure ridurre in minuti primi, e così in altri, ec.

§. 178. Vogliasi ridurre in palmi di canna il rotto o . o5 di una canna, si multiplichi o . o5 per 8, e si otterrà per prodotto o . 40; ma siccome in questo prodotto non si contengono intieri, segno è che il decimale proposto o . o5 è minore di un palmo, perciò non si può ridurre in palmi, si potrà bensì ridurre in once, cioè in dodicesime di palmo, o in 96.me di

canna, che multiplicate per 5, ed il prodotto 480 diviso per 100, danno 4, 80, cioè quattro once e 80 di oncia, equivalente al rotto decimale 0 . 0 5 di canna.

§. 179. Si debba ridurre 10 minuti dell' orologio italiano in minuti dell' ora dell' orologio decimale, che è di 144 minuti: Siccome 10 minuti eguivalgono a $\frac{10}{60}$ di ora, perciò si dovrà multiplicare 10 per 144 e dividere il prodotto per 60, e si otterrà minuti 24, cosicchè i 10 dell' orologio italiano sono 24 dell' orologio decimale. E volendo ridurre 12 minuti dell' orologio decimale in minuti dell' orologio italiano, osservando che i 12 sono $\frac{12}{144}$ si multiplicherà 12 per 60 ed il prodotto si dividerà per 144, e si troverà essere il quoziente 5, vale a dire che 12 minuti dell' ora decimale sono 5 dell' ora italiana.

Numeri complessi.

§. 180. Le unità elementari de' numeri interi, o rotti o si riportano a qualche particolar sorta di oggetti, o no. Nel primo caso i numeri son detti *complessi*, nel secondo *incomplessi*: di questi si è discorso: parlisi ora de' *complessi*.

L'unità fu scelta ad arbitrio da ciascheduna Nazione, ed in diversi modi divisa, e suddivisa, come tuttora esiste. Ogni Società ne fece i rispettivi modelli per la sua esatta conservazione. Fu altresì necessario ad ogni arte, ad ogni scienza dividere, e suddividere l'unità e saperla valutare anche divisa in parti, le quali, avendo una reale esistenza, formano tante nuove unità relative alla prima di cui son parte, ed in modo che questa da un certo numero di quelle si può formare. Un esempio si ha nel giorno, il quale se prendasi per unità del tempo, ciò non impedisce che si concepisca diviso in 24 parti dette ciascuna *ora*, la quale può prendersi per una nuova unità relativa alla prima, e questa nuova unità supporla anche divisa in 60 parti, e ciascuna di queste, che costituir può una

nuova unità, relativa alla prima, e questa nuova unità supporla anche divisa in 60 parti, e ciascuna di queste, che costituir può una nuova unità relativa alle precedenti, chiamarsi, come si fa, minuto, così potrà ben dirsi 20 giorni, 10 ore, 15 minuti; osservando però che ciascun di questi numeri si deve rapportare all' unità, che gli è propria, per cui è indispensabile di aver sempre presente la divisione dell' unità, a cui i medesimi si riferiscono, per saperveli rapportare.

§. 181. Qualunque spressione numerica di questa natura, composta di più numeri, rapportata ad unità diverse, ma correlative tra loro, è ciò che appellasi numero complesso.

§. 182. In questi numeri complessi quello, che rappresenta una parte di quelli non può mai giungnere ad uguagliare il numero delle unità, che forma l' unità superiore, così non potranno giungere a 24 le 10 ore, ed a 60 i 15 minuti, ma bensì saranno sempre minori.

Norma per servire alla conoscenza dell' esatta misura delle grandezze.

§. 183. Per la misura della circonferenza del *circolo* i Geometri la supposero divisa in 360 parti eguali, chiamate gradi, ec. di cui si tenne parola, e questo numero fu preferito ad ogni altro per la quantità de' suoi divisori.

Il tempo fu suddiviso in giorni, il giorno in 24 ore, l'ora in 60 minuti, il minuto in 60 secondi, ec.

Per le grandi distanze fu scelto il *miglio*, che si divide in 100 passi, ogni passo in 7 palmi e $\frac{1}{3}$.

Per le piccole distanze si prese la *canna*, che si divide in 8 palmi, il palmo in 12 once, l' oncia in 5 minuti.

Per l' estensione de' terreni si stabilì il *moggio*: questo è una figura quadrata, il di cui lato è di 30 passi o 220 palmi, e l' intera superficie di 48400 palmi quadrati.

Pel peso de' corpi leggieri si determinò la *libbra*, che si divide in 12 once, l' oncia in 30 trappesi, il trappeso in 20 acini.

Pel peso de' corpi di maggior grossezza si scelse il cantaio,

che si divide in 100 rotola, il rotolo in once 33 $\frac{1}{3}$

La *botte* si divide in 12 barili, il barile in 60 caraffe la caraffa in 33 once o quattro bicchieri.

Lo *staio* per la misura dell'olio si divide in 16 quarte, e la quarta in 6 misurelle.

Il tomolo per la misura del frumento si divide in quattro quarte, ogni quarta in 6 misure.

Il *carro* della calce si divide in 24 pesi, e'l peso è di 40 rotoli.

La *Tesa*, misura francese, si compone di 6 piedi, il piede di 12 pollici, il pollice di dodici linee, la linea di dodici punti.

Per l'unità della moneta si stabilì il *ducato*, che si divide in carlini 10, ogni carlino in dieci grani, ogni grano in dodici cavalli ed anche in dieci.

Essendo sì varie le specie di divisioni, è necessario che si sappia valutare l'unità divisa in tutte queste parti, e specialmente per la multiplica de' numeri complessi, ove per abbreviare le operazioni si fa uso delle parti aliquote di ciascuna grandezza.

Le unità di cui sopra si è parlato, benchè diversamente divise in ciascuna nazione, si può non di meno paragonarle fra loro, affine di ritrovare l'esatto valore, cui corrispondano le parti di ciascheduna relativamente a quella di una medesima unità, ma come ciò spetta alla regola di tre non è questo il luogo di trattarne, come; p. e. volesse sapersi una canna napolitana á che corrisponde della misura toscana, ec. così; un ducato napolitano a che equivale della moneta romana, ec.

Addizione de' numeri complessi.

Riflessione: Per ridurre, o richiamare le parti ai loro intieri principali, fà d'uopo dividerne il numero per quello, che esprime quante parti ne abbisognano per formare il tutto o sia l'intero principale.

§. 184. Si dispongono i dati numeri complessi in modo che le loro parti rapportate alla istessa unità, e le cifre corrisponden-

ti siano nella medesima colonna verticale ; e si osservi quante unità della classe minore vi vogliono per formarne una delle maggiori , e quale sia l'ordine con cui si succedono. Si raccolga poi in una sola somma tutte quelle parti esprimenti l'infima unità ; e da quelle tolte , se ve ne hanno , le unità , che vengono immediatamente , scrivasi le rimanenti sotto la stessa colonna , e così di seguito sino a che giunti ad addizionare le unità principali si potrà operare come su gl'intieri. In tal modo si otterrà la somma , che è appunto la collezione delle varie specie de' numeri dati , secondo la divisione dell'unità alla quale appartengono.

Esemplo

	ducati ,	carlini ,	grani ,	cavalli .
	1 1 0.	9.	9.	11.
	5 8.	7.	6.	8.
	3 7.	8.	5.	10.
duc.	2 0 7.	6.	2.	5.

Esemplo .

	Canne,	palmi,	once,	minuti.
	8.	7.	11.	3.
	10.	6.	10.	2.
	4.	5.	8.	0.
Can:	24.	4.	5.	0.

Esemplo .

	Libbre,	once,	trappesi,	acini .
	48.	9.	17.	15.
	37.	11.	8.	1.
	9.	10.	6.	3.
	26.	5.	24.	0.
Libbre.	123.	0.	25.	19.

Can-

Cantaia,	rotola,	once.
124.	25.	30.
79.	17.	21.
10.	9.	7.
Cantaia 213.	52.	24. $\frac{2}{}$

Botti,	barili,	caraffe.
10.	8.	50.
8.	6.	36.
120.	10.	25.
Botti 140.	1.	51.

Tese,	piedi,	pollici.	linee.
36.	4.	8.	5.
14.	11.	9.	3.
Tese 52.	4.	5.	8.

Sottrazione de' numeri complessi.

§. 185. Per sottrarre i numeri complessi, che si rapportano alla stessa unità, si deve osservare le stesse regole date per li numeri intieri, vale a dire di porre il minor numero sotto il maggiore, e le unità della medesima specie le une sotto le altre, e fare occorrendo l' imprestito su le colonne delle unità maggiori; le quali si dovrà considerare a seconda del loro valore, e dividerle perciò nelle loro parti.

Si debba sottrarre:

Ducati,	carlini,	grani,	cavalli.
30.	9.	8.	10.
21.	8.	7.	5.
Duc. 9.	1.	1.	5.

Con

Canne,	palmi,	oncè,	minuti.
10.	6.	5.	3.
6.	8.	9.	4.
Canne. 3.	5.	7.	4.

Cantaia,	rotola,	once.
122.	20.	10.
88.	36.	30.
Cantaia. 33.	83.	13. $\frac{1}{3}$

Libbre,	once,	trappesi,	acini.
37.	11.	24.	18.
12.	7.	13.	9.
Libbre 25.	4.	11.	9

Botti,	barili,	caraffe.
130.	4.	20.
68.	11.	34.
Botti. 61.	4.	46.

Tese,	piedi,	pollici,	linee.
78.	3.	4.	10.
19.	7.	6.	4.
Tese 58.	1.	10.	6.

§. 186. Prima di passare alla multiplica' de' numeri complessi si richiami alla mente il modo usato tanto al §. 135, che al §. 147. per la multiplica di due fattori, il qual modo è assai più spedito di qualunque altro; ma per eseguirlo bene fa d'uopo sapere quante parti dell' altro fattore si debbe prendere, o sia che per la specie minore si deve prendere

tanta parte dell'altro fattore, quante parti dell'unità della specie prossimamente maggiore è il dato numero di specie minore, e ciò secondo il diverso numero di grana, o cavalli se trattasi di moneta; quello delle libbre, delle once, ec. se si tratta di pesi; quello delle canne, palmi, once, Tese, ec. se trattasi di misure, e quello delle botti, barili, caraffe, se liquidi, ec. perciò è necessario imparar bene a memoria la norma delle parti aliquote, corrispondenti a ciascuna delle indicate specie; notando che per parti aliquote di un numero si intende un altro minore, che lo misura esattamente senza residuo, come il 4 è di 12.

Parti aliquote di un ducato.

§. 187. Se il fattore contiene ducati, carlini, grana e cavalli, siccome 10 carlini formano un ducato, così per un carlino si prenda il decimo dell'altro fattore; per due carlini la quinta parte; per tre prima il quinto, indi la metà di ciò che si è ottenuto; per 5 la metà; per 6 la metà ed un quinto della metà; per 7 la metà e due quinte parti; per 8 la metà e tre quinte parti; per 9 la metà e due volte il quinto dell'altro fattore.

In quanto alle grana si opera su questa specie come si è operato su de' carlini. In quanto a' cavalli, come 12 cavalli formano un grano, così per un cavallo si prenda il dodicesimo; per due il sesto; per tre il quarto; per quattro il terzo; per cinque il terzo, e la quarta parte di questo; per sei la metà; per sette la metà, ed il sesto di questa; per otto la metà ed il suo terzo; per nove la metà, e la metà dell'ottenuto; per dieci la metà, ed il terzo dell'altro fattore; per undici la metà, il terzo dell'altro fattore, e la quarta parte di questo.

Parti aliquote de' pesi.

§. 188. Le once sono le parti aliquote della libbra, e come 12 once formano una libbra, così per un'oncia si prenderà la dodicesima parte dell'altro fattore; per due once la sesta parte, ec. e così di seguito si prenda le parti aliquote, come si è fatto pe' cavalli rispetto ai grani.

I trappesi sono parti aliquote di un' oncia, e come un' oncia è divisa in trenta trappesi, così per un trappeso si prenderà la trentesima parte dell' altro fattore; per due la quindicesima; per tre la decima; per quattro, prima la decima parte per tre, e per uno il terzo di quest' ultima; per cinque la sesta parte; per sei la quinta; per sette, la quinta parte per sei, ed il sesto del quinto; per otto, il quinto per sei, ed il terzo del quinto per due; per nove tre volte il decimo; per dieci il terzo, ec. ec.

Gli acini sono le parti aliquote di un trappeso, e come venti acini formano un trappeso, così per un acino si prenderà il ventesimo dell'altro fattore, per due il decimo; per tre il decimo, e la sua metà; per quattro la quinta parte; per cinque la quarta parte; per sei il quinto, e la metà del quinto; per sette, il quarto per cinque, e per due il decimo; per otto i due quinti; per nove il quarto ed il quinto; per dieci la metà; per undici la metà ed il decimo di questa, ec ec.

Parti aliquote delle misure lineari.

§. 189. I palmi sono parti aliquote della canna, e come la canna si divide in otto palmi; dunque per un palmo si prenderà l' ottava parte dell' altro fattore; per due il quarto; per tre il quarto e la metà del quarto; per quattro la metà; per cinque la metà, ed il quarto di questa; per sei la metà, ed il quarto; per sette la metà, il quarto, e là metà di questo.

In quanto alle once, come ogni palmo si divide in dodici once, così si proceda come si è detto pe' grani e cavalli.

I piedi sono parti aliquote di una tesa, e come sei piedi formano una *Tesa*, così per un piede si prenderà la sesta parte dell' altro fattore; per due il terzo; per tre la metà; per quattro i due terzi; e per cinque la metà ed il terzo. E come ogni piede si divide in dodici pollici, ed ogni pollice in dodici linee, così per questi si operi, come si è prescritto pe' grani e cavalli.

Parti aliquote de' liquidi.

§. 188. I barili sono parti di una botte, e come dodi-

ci barili formano una botte, così per questi si dovrà operare come si è detto pe' cavalli e grana. E come ogni barile si divide in sessanta caraffe, prendendo dalla sessantesima parte successivamente le rispettive parti aliquote si avrà tanti barili ; e del pari come ogni caraffa si divide in trentatrè once, si prenderà per un oncia la trentatreesima parte per aver le caraffe, e così in seguito.

Multiplica de' numeri complessi.

§. 189. Può accadere che il multiplicando essendo complesso, il multiplicatore sia astratto, o vero che il multiplicando essendo astratto o complesso, il multiplicatore sia complesso, il che importa esaminare separatamente.

Si debba primamente multiplicare un numero complesso per un numero astratto :

		p.	on.
Canne	8.	4.	6.
	6.		
	51.	3.	0.

Per effettuare la multiplica si cominci a multiplicare le sei once per 6, che fanno 36 once, e come 36 once formano tre palmi, così si scriva zero sotto le once ritenendo li tre palmi Indi si multiplichi i quattro palmi per 6, ed al prodotto 24 uniti i tre, che si è ritenuto, si avrà 27 palmi, da cui tolti 24, o tre canne, si noti il residuo 3 sotto i palmi, e finalmente multiplicate le otto canne per 6, ed aggiungendovi le tre canne ritenute, si avrà canne 51, e si sarà ottenuto il prodotto in canne 51. 4. 6. Se poi il multiplicatore 6 avesse dinotato il valore di una canna, e si fosse cercato quello di canne 8. 4. 6. l'operazione si sarebbe eseguita, come si prescrisse al §. 135, e 147, ed in tal caso i prodotti parziali di $\frac{4}{8}$ e $\frac{6}{12}$ esprimerebbero valori.

§. 190. Nell' addotto esempio, §. 189, il multiplicatore

era espresso da una sola cifra, e perciò si è cominciata l'operazione dalle once, e si è determinato senza gran fatica i palmi somministrati dalle once, e le canne dai palmi. Ma se il multiplicatore fosse composto di più cifre, le stesse determinazioni non si potrebbe eseguire a mente, ma converrebbe fare a parte le multipliche parziali ed in seguito le corrispondenti divisioni per convertire le specie inferiori in altri ordini superiori, il che sarebbe laborioso. In simili casi è meglio praticare come si è cennato al §. 147, e come si è detto al §. 184.

Multiplicare canne 345 . 6 . 9 per 234. (pl. onc.)

				Canne 345. 6. 9
				234
		primo prodotto.	parziale	1380
		secondo prodotto.	parziale	1035
		terzo prodotto.	parziale	690
Per	4. palmi.	quarto prodotto.	parziale	117.
Per	2. palmi.	quinto prodotto.	parziale	058.5
Per	6. once.	sesto prodotto.	parziale	146.2
Per	3. once.	settimo prodotto.	parziale	731
			prodotto totale Canne	80927.6..3

Si multiplichi 345 per 234 il che dà i tre primi prodotti parziali, come si vede nel quadro superiore. Si passi a multiplicare li 6 palmi per 234 e si osservi che se si dovesse multiplicare una canna per 234 si avrebbe per prodotto 234 canne Ma come i 6 palmi non sono che una certa parte di una canna, egli è chiaro che il prodotto di 6 palmi per 234 ridotto in canne deve essere la medesima parte di 234 che sei palmi sono di una canna. Or 6 palmi sono i tre quarti di una canna, ovvero sciogliendoli in quattro e due ne sono la metà ed il quarto, perciò se prendasi la metà di 234, indi il quarto di detta quantità, o sia la metà della precedente metà, si avrà tutto d' un tratto in canne il prodotto di sei palmi per 234, il che già, si è insegnato a' §§. 147. e 184. Fatte queste operazioni si sarà trovato con ciò il quarto ed il quinto

prodotto parziale. Passando a multiplicare le 9 once per 234 si faccia lo stesso raziocinio, che si è fatto per li 6 palmi, di poi si divida le 9 once in 6 e 3; per le 6 once si prenda la quarta parte del quinto prodotto parziale, il che dà il sesto prodotto parziale, e per 3 once la metà di quest' ultimo, che forma il settimo prodotto parziale. E finalmente aggiunti insieme tutti i prodotti parziali si avrà per prodotto totale canne 80927. 6. 3.

§ 191. Accade talora che in qualche multiplicazione vi siano i cavalli senza alcun grano; dovendo conteggiare i primi su l'unità o resto di quest' ultimo, sebbene non vi sia, si fa un falso prodotto di un unità prendendo la centesima parte del multiplicatore, come che un grano è la centesima parte di un ducato, ponendolo in parentesi, affine di non comprenderlo nell' addizione, e su di questo falso prodotto si conteggi i cavalli, come il tutto si vede nell' esempio seguente.

Esemplo.

```
Ducati  2 7 . 0 . 1 1.
          8 1 5
        ______________
          1 3 5
          2 7
        2 1 6
           (0 0 8  1 5 )
                4  . 7 , 6
                2  . 3 . 9
                1  . 5 . 10
        ______________
Duc.  2 2 0 1 2 . 2 7 . 1
```

§. 192. Sia ora il multiplicatore complesso, vale a dire che oltre gl' interi contenga una o più frazioni. In questo caso si multiplichi il multiplicando per gli intieri del multiplicatore come sopra, indi si prenda del multiplicando e del multiplicatore, se ha luogo, quelle stesse parti che le frazioni sono

dell' unità come si rileva dai seguenti esempli, valutando in questo primo il grano dieci cavalli.

```
Duc. 3 4 5.1 0.2.
          7 0. 2/3
------------------------
  2 4 1 5 0.
        0 7
         1.    40
        1 1 5 . 3. 4
        1 1 5 . 3. 4
------------------------
  2 4 3 8 8. 4 6. 8.
```

Dopo di aver multiplicato tutto il multiplicando per 70; incui si prenda due terzi dal multiplicando, o sia, ciò che è lo stesso, se ne prenda il terzo due volte, come si è fatto. Addizionati tutti i prodotti parziali, si avrà il prodotto totale, come si vede, della stessa natura del multiplicando, considerando il multiplicatore, sebbene complesso, come numero destinato a rappresentare il numero delle unità per lo quale deesi prender l' altro, ed è perciò che in simili casi il prodotto totale è della stessa natura del multiplicando.

Si debba fare la multiplica di due fattori indicanti uno genere apprezzato, e l' altro prezzo.

```
Tomola 180 1/2
      a ducati 3. 12. 6.
---------------------------
        5 4 0
           1. 56.3.
      0 1 8.
           3.6 0
           0.9 0
---------------------------
   Duc. 5 6 4.0 6.3.
```

Dopo di aver multiplicato gl' intieri del multiplicando per gl' intieri del multiplicatore, si prenda del multiplicatore quel-

la parte, che la frazione del multiplicando è dell'unità, e del pari si prenda nel solo numero intero del multiplicando quelle parti, che le frazioni del multiplicatore sono dell'unità, come vedesi.

§. 193 Abbia il multiplicando ed il multiplicatore più frazioni come: Una canna di un certo lavoro essendo costata duc. 24. 12. 6. si vuol sapere il valore di canne 345 6. palmi e 6 once.

```
   Canne  3 4 5.   6  6.
   A duc.   2 4.  12 .6.
        =—————————————
        1 3 8 0
        6 9 0
            1 2.   6 . 3.
            0 6.   3 . 1.
              1.   5 . 8.
          0 3 4.  50 . 0.
          0 0 6.  90 . 0.
              1   72 . 6.
        ——————————————
duc.  8 3 4 2.  27 . 6.
```

Si multiplichi prima il 345 per 24. Indi scomposti i 6 palmi del multiplicando in 4 palmi, e in due palmi, de' quali i quattro palmi sono la metà di una canna, ed i due la metà di questi; è chiaro che a ragione della prima si dovrà prendere la metà del multiplicatore, ed a ragione della seconda la metà di ciò che si è ottenuto. Per le sei once che sono la metà di un palmo, ed in questo caso la quarta parte di due palmi, si prenderà la quarta parte del prodotto, ottenuto per due palmi, osservando che il grano quì è valutato dodici cavalli, e che nelle due ultime operazioni si è trascurata la frazione di frazione, ma compensata su l'ultima cifra 8. Ora scomposti i 12 grani in 10 e 2, per 10 come decima parte di 100, si prenda la decima parte del solo 345, per 2 il quinto dell'ottenuto, e per 6 cavalli il quarto dell'ultimo prodotto. Ed aggiunti insieme tutti i prodotti parziali si vedrà che le canne 345, 6 palmi, e 6 once costano ducati 8342. 27. 6.

Divisione de' numeri complessi.

§. 194. Nella *divisione* si deve pure distinguere due casi, o il dividendo è complesso, e il divisore astratto, o il dividendo è astratto o complesso, e 'l divisore complesso. Si esamini l' uno e l' altro caso.

§. 195. Quando il dividendo è complesso e 'l divisore astratto, si divida successivamente tutte le parti del dividendo pel divisore, e si otterrà delle unità di diversa specie. Così dovendo dividere ducati 345. 10. 5. fra 24 persone, egli è evidente che tutto si riduce a dividere il dividendo in 24 parti eguali, ad ecco quì per disteso tutte le operazioni da farsi:

Dividendo 345. 10. 5. | 24 divisore
| duc. 14. 37. 11. $\frac{5}{14}$ parte

24
―――
105
96
―――
= 9
100
―――
900
10
―――
910
72
―――
190
168
―――
= 22
12
264
5
―――
269
24
―――
= 29
24
―――
= 5

Si divida primamente i ducati 345 per 24, la parte, che ne risulta è 14 ducati con un residuo di 9. Questo residuo si multiplichi per 100 di cui è composto il ducato, e si avrà grana 900, a cui aggiunti li 10 grani, che pure si deve dividere per 9, fanno 910 grani da dividersi per 24, il che fatto dà per parte grana 37 col resto di grana 22. Si riduca questo restó in cavalli multiplicandolo per 12., e si avrà 264 cavalli, a cui aggiunti li 5 fanno 269 cavalli che pure si deve dividere per 24: ciò eseguito, si ha cavalli 4 con un resto di $\frac{5}{24}$, che non potendosi ridurre in altre unità si scrive nel quoto. Si è dunque ottenuto per *parte* dalla divisione indicata di ducati 345. 10. 5. fra 24 persone duc. 14. 37. 11. $\frac{5}{24}$.

§. 196. Se poi il solo divisore è complesso la divisione può farsi in prima col rendere il divisore astratto riducendolo in unità dell' infima specie, se il divisore, che risulta è minore del dividendo si fa per esso la divisione, riducendo il quoto dopo aver fatto l'operazione, alla specie maggiore. Così volendo dividere duc. 45 per $14\frac{2}{3}$, si cominci del ridurre le 14 unità semplici del divisore in terzi, il che dà $\frac{44}{3}$ §. 102. Or dividere ducati 45 per $\frac{44}{3}$ è multiplicare il dividendo pel denominatore 3, e dividere il prodotto pel numeratore 44. Multiplicati pertanto li ducati 45 per 3, si avrà per prodotto ducati 135 da dividere per 44.

Esempio.

Dividendo	1 3 5.	4 4 divisore
	1 3 2	d. 3. 6. 9 $\frac{36}{44}$
	= 0 3 0 0	
	2 6 4	
	= 3 6	
	1 2	
	4 3 2	
	3 9 6	
	= 3 6	

Fatta la divisione, e ridotto il divisore alla specie maggiore, come si vede, si trova che li ducati 135 danno per quoto ducati 3. 6. 9. $\frac{36}{44}$

Altro esempio.

Una staffetta istraordinaria ha fatto 762 miglia in 5 giorni e 7. ore, si vuol sapere quante miglia abbia fatto ogni giorno.
Ridotti in ore i 5 giorni si avrà 120 ore, a cui unite le 7, formano 127 ore; per le quali si deve dividere le miglia 762.

Dividendo	7 6 2	1 2 7. divisore
	7 6 2	6.
	= 0 0	

Risulta dall' operazione che la staffetta ha corso miglia 6 l' ora, perciò 144 al giorno.
Ma se il divisore, che risulta è un numero maggiore del dividendo, si multiplichi ancora il dividendo per quel medesimo numero col quale si e ridotto il divisore all' infima specie:

Esemplo.

Un pedone ha corso 28 miglia in 5 ore e 20 minuti, si domanda quante miglia abbia fatto per ogni ora.
Le 5 ore ridotte in minuti fanno minuti 300, cui aggiunti li 20, si avrà minuti 320. Siccome il dividendo 14 miglia non può dividersi per 320 si multiplichi anche esso per 60, e risulterà il numero 1680, il quale si deve dividere per 320.

Dividendo	1 6 8 0	320. divisore
	1 6 0 0	5. $\frac{80}{320}$ o $\frac{1}{4}$
	1 0 8 0	

Dalla operazione fatta si deduce che il pedone ha fatto miglia 5 e $\frac{1}{4}$ di miglio per ogni ora.

§. 197. Secondamente può farsi pure la divisione, essendo il divisore complesso, col ridurre sì il dividendo che il divisore in unità della medesima specie.

$$\text{Dividendo } \begin{array}{r} 80 \\ 3 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 10.\ \frac{2}{3} \text{ divisore} \\ \hline \frac{32}{3} \end{array}$$

Si riduca le unità semplici in terzi il che dà $\frac{32}{3}$ terzi §. 102; ora si multiplichi 80 per 3, e si avrà 240 da dividersi per 32, il che dà per quoto $7\ \frac{1}{2}$

§. 198. Se il dividendo, ed il divisore sono tutti e due complessi, si deve osservare se ambidue esprimono uno stesso genere di cose, o generi diversi.

Nel primo caso che esprimano uno stesso genere di cose, si riduce tutti e due all' infima specie, e si esegue in questo modo la divisione:

Esempio.

Si domanda quante some di frumento si può comprare con ducati 369, 7 grana, e cavalli 6, a ducati 14, 15 grana e cavalli 6 la soma.

Dividendo 369. 7. 6.	14. 15. 6. divisore
	26. $\frac{1254}{16986}$

Si riduca i 369 ducati in grani, e vi si aggiunga li 7,

indi si riduca il tutto in cavalli e unitivi li 6 si avrà cavalli 442890.

Si riduca i 14 ducati del divisore in grani e vi si unisca i 15, la somma ottenuta si riduca in cavalli, e vi si aggiunga li 6 e si avrà cavalli 16986. Fatta la divisione de' primi pe' secondi si avrà Some 26 con una frazione, e ciò indicherà le some di frumento, che si potrà comprare con la suddetta somma.

Se fatta la divisione vi è qualche resto, questo si può moltiplicare per la specie prossimamente minore di ciò che si vuole nel quoto, e continuando la divisione, si avrà nel quoto le parti di questa specie.

§. 199. Nel secondo caso che il dividendo e 'l divisore esprimono diversi generi di cose; si riduce tutti e due alla loro più piccola specie, e fatta la divisione, il quoto indicherà quanto delle parti espresse dal dividendo tocchi a ciascuna parte del divisore. Se fatta l' operazione non vi è resto, si riduca il quoto alla specie maggiore, come già si è prescritto,

Se vi è un qualche resto si multiplichi per quello istesso numero, col quale si è ridotto il divisore all' infima specie, si otterrà una frazione da aggiungersi al quoto, il di cui denominatore sarà l' anzidetto numero.

Esempio.

Un uomo avendo lavorato ad uno scavo 12 giorni, e 6 ore, riceve ducati 24 e grana 2, si dimanda a ragione di quanto per giorno gli riviene.

Dividendo 24. 2. 6. | 12. 6. divisore

| — — 98 $\frac{98}{294}$

Si riduca li ducati 24 in grana, e vi si aggiunga li due, il tutto poi si riduca in cavalli, e vi si unisca li 6 e si sarà ottenuto cavalli 28830.

Si riduca li 12 giorni in ore, e vi si aggiunga le 6 e si

otterrà 294 ore. Si faccia indi la divisione, ed il quoto sarà di cavalli 98, più $2\frac{98}{94} = \frac{1}{3}$ e questo indica ciò che spetta al lavorante per ogni ora. Volendo il guadagno di un giorno, si multiplica li cavalli $98.\frac{1}{3}$ per 24 ore, e ne risulterà cavalli 2360 che divisi per 12 danno grana 196, e cavalli 8 per l' intero giorno.

§. 200. La divisione de' numeri complessi si può ancora eseguire considerando i due fattori come due frazioni; riducendoli all' infima specie, e operando su di questi col metodo prescritto nella divisione delle frazioni. Il quoziente che si avrà si risolva nelle varie specie del dividendo, e si sarà ottenuto quello che si richiedeva.

La verità di ciò dipende e dalla natura de' numeri complessi, e dalle regole date per la divisione delle frazioni.

Formazione delle potenze e radici de' numeri.

§. 201. Quel numero, che si ottiene multiplicando un numero per un altro chiamasi *prodotto*, §. 36; ma ciascuno di quei continui prodotti, che risultano dalla successiva multiplica di un numero per se stesso, dicesi con altro vocabolo *potenza* di quel numero. Gli Aritmetici hanno voluto con questo distinguere soltanto il nome di *prodotto* da quello di *potenza* di un numero, benchè la formazione di una potenza di un numero si riduca ad una semplice multiplica, come chiaro appare.

§. 202. Potenza prima pertanto di qualunque numero è il numero istesso multiplicato per l' unità, perciò 2 è la prima potenza di 2, così la è 7 di 7 d' onde deriva che il valore assoluto di qualunque numero è la sua prima *potenza*.

§. 203. Il prodotto di un numero multiplicato per se stesso soltanto ne è la *potenza seconda*, che pure dicesi *quadrato* del medesimo numero, così $7 \times 7 = 49$ è la *potenza seconda* o il *quadrato* di 7.

Per formare adunque la *potenza seconda* o sia il quadrato di un numero non sono necessarie regole, ma per tornare dalla potenza alla sua radice è necessario un metodo, come si vedrà

§. 204. La *potenza seconda* o il quadrato di un numero multiplicato pel numero istesso ne è la *potenza terza*, che ancora chiamasi *cubo* di quel numero, perciò $49 \times 7 = 343$ è la *potenza* terza o il *cubo* di 7.

§. 205. Se poi si multiplichi 343 per $7 = 2401$, si avrà la quarta potenza di 7, cioè a dire il prodotto del numero pel suo cubo, e così di seguito per le altre potenze, ma gli Aritmetici non si occupano che delle sole potenze, e radici seconda, e terza.

§. 206. L'operazione, che si fa per trovare una certa *potenza* di un numero, si chiama formazione di questa potenza.

§. 207. Da ciò si deduce questa regola generale: che per elevare una quantità ad una potenza data, si deve multiplicarla in se stessa tante volte, quante unità si contengono nell' esponente o numero determinante la potenza, meno una.

Per *potenza* s' intende quel numero, che fissa a qual potenza si deve innalzare il dato numero.

§. 208. Ne' numeri rotti si ottiene egualmente le diverse potenze multiplicando il rotto tante volte per se stesso, quante unità si contengono nell' esponente della *potenza*, a cui si vuole innalzare, meno una.

§. 209. Si chiama *radice* di una *potenza* il numero, che multiplicato in se stesso un certo numero di volte produce questa potenza.

§. 210. Il numero, che si è sopra multiplicato per se stesso, onde ottenere la potenza seconda, si chiama radice quadrata di detta potenza, perciò 7 è la radice quadrata o numero *generatore* di 49. §. 203,

§. 211. Quel numero, che si è multiplicato per la potenza seconda per ottenerne la terza, o sia il cubo, chiamasi radice cubica di essa potenza terza, perciò 7 è la radice cubica di 343. §. 204.

§. 212. Il numero 7, che si è sopra multiplicato per se stesso per ottenere il suo quadrato 49, egualmente si ottiene se dividasi la sua radice in due parti 5, e 2. Si faccia poi il quadrato di ciascuna di queste due parti, ed alla somma si aggiunga il prodotto del doppio di una parte multiplicata per l'altra, così: il

il quadrato di 5 è . . . . 25.
quello di . . 2 è . . . . 4.
il doppio di 2 che . . .
è $4 \times 5 =$ . . . . 20.

Totale 49.

quadrato di $7 \times 7 = 49$

§. 213. Il numero 7, che si è sopra multiplicato per se stesso per ottenere il suo quadrato 49 e poi si è questo multiplicato un' altra volta per 7 per ottenere il suo cubo, si ottiene egualmente se dividasi il numero *generatore* 7 in due parti 5, e 2. Si faccia in seguito i cubi di ciascuna delle due parti ed a questa somma si aggiunga il prodotto del triplo del quadrato di ciascuna parte per l'altra.

Cubo di 5. . . . . . 125.
Cubo di 2. . . . . 8.
Il triplo del quadrato
di 5, o 75×2 150.
Il triplo del quadrato
di 2, o $12 \times 5 =$ 60.

Cubo. 343.

Cubo di 7
7
49
7
Cubo. 343

§. 214. Da ciò sorge che se un numero è composto di decine e di unità, il suo cubo contiene quattro parti, e sono; il cubo delle decine, il triplo quadrato delle decine multiplicato per le unità, il triplo quadrato delle unità multiplicato per le decine, più il cubo delle unità.

Sia dunque 43 numero composto di decine e di unità di cui si voglia il cubo.

Cubo delle decine . . . 64
Il triplo quadrato delle decine
multiplicato per le unità. . . 144
Il triplo quadrato delle unità
multiplicato per le decine. . . 108
Il cubo delle unità 27

Cubo 79507

Si sarebbe ottenuto egualmente il suddetto cubo multiplicando 43 per 43 ed il suo prodotto di nuovo per 43, avvertendo alla disposizione de' numeri per essere il cubo delle decine, di migliaia; il triplo quadrato delle decine per le unità, di centinaia, ec. ma giova piuttosto questo metodo per iscoprire per mezzo dell' esame delle parti, che lo compongono, il modo di tornare alla sua radice, e per norma d' innalzare alla potenza terza qualunque altro numero, anzi pure pel *binomio* in Algebra.

§. 215. Volendo poi la potenza seconda o il quadrato di una frazione, si faccia il quadrato di ciascun de suoi termini, che la compongono, e tali quadrati occupino il medesimo luogo in una frazione novella, questa sarà la potenza seconda o il quadrato della frazione data. Il quadrato dunque di $\frac{3}{4}$ è $\frac{9}{16}$ quello di $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{4}$, e quello del rotto decimale o . 04 — o . 016.

§. 216. Se vogliasi ottenere il quadrato di una frazione, a cui vada annesso un numero intiero, si faccia dell' intero e della frazione una sola frazione, e di questa il quadrato come sopra Si cerchi il quadrato di $5\frac{2}{3}$ ciò equivale a $\frac{17}{3}$ §. 102. il di cui quadrato è $\frac{289}{9}$

§. 217. Si otterrà il cubo di una frazione, facendo il cubo de' due termini, che la compongono, e tali cubi occupino il medesimo luogo in un altra frazione, questa sarà il cubo della frazione data, il cubo pertanto di $\frac{2}{3}$ è $\frac{8}{27}$ e quello di $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{8}$, e quello del rotto decimale o. o3 = o. o27.

§. 218. E volendo ottenere il cubo di una frazione unita con un intero, si riduca l' intero e la frazione ad una frazione, §. 102, e de' cubi de' suoi due termini si formi una frazione, che sarà il cubo della data: sia l' intero e la frazione $3\frac{1}{3}$ eguale a $\frac{10}{3}$ il di cui cubo è $\frac{1000}{27}$

§. 219. Acciò le operazioni, che deve eseguire, rieschino più facili, si apprenda dalla tavola quì sotto posta le seconde, terze e quarte potenze de' numeri semplici, osservando

che tutte le potenze di *uno* sono *uno*, perchè *uno* multiplicato per se stesso quante volte si voglia non può dar che uno, qual proprietà appartiene all' unità esclusivamente a tutti gli altri numeri, e che il *quadrato* di un numero semplice non può mai esser di più di due cifre, ed il *cubo* di tre.

TAVOLA

de' quadrati, cubi e 4.e potenze.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	8	27	64	125	216	343	512	729
1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561

Estrazione della radice quadrata.

§. 220. Si potrà sempre estrarre da un dato numero la sua radice quadrata o esatta, purchè questo numero abbia un multiplicatore perfetto, o per approssimazione, se di questo mancherà. Questa operazione pertanto si riduce a trovare un numero, che multiplicato per se stesso produca il numero da cui si vuole estrarre la radice quadrata, o il massimo quadrato, che in esso è contenuto. Così dato il numero 16, e volendo la sua radice quadrata, essa sarà 4 come vedesi nel quadro. Se poi fosse dato il numero 18, e si volesse la sua radice quadrata, non avendo questo numero un multiplicatore perfetto, converrà prender quel numero, che ripetuto in se stesso dà il numero più prossimo al 18, ed in questo caso sarebbe 4, che multiplicato per se stesso dà 16 numero più di ogni altro prossimo al 18; e così praticar si deve per ogni altro numero.

§. 221. Ogni numero poi espresso da più di due cifre ne avrà necessariamente più di una alla sua radice. Si osservi che 100 numero il più piccolo composto di più di due cifre, ha 10 per radice espresso da due cifre. La radice pertanto di qualunque numero, espresso da più di due cifre, dovrà contenere un certo numero di decine, e di unità, le quali in certo modo multiplicate, §. 212, entrano nella formazione del quadrato.

Così sia 25 la radice di un numero e si voglia il suo quadrato; siccome esso è composto di due decine o 20, e di 5 unità si formerà il suo quadrato a norma del §. 212, facendo il quadrato delle decine, e quello delle unità, più prendendo il doppio delle decine multiplicato per le unità, o ciò che è lo stesso il doppio delle unità per le decine:

Esempio,

quadrato di 20	400
quadrato di 5.	25
quadrato di 10. per 20.	200
Totale	625 quadrato della radice 25.

§. 222. Conosciuto da quanto si è detto come si forma questa sorta di quadrati, non sarà difficile di rinvenire la radice di un numero qualunque, o almeno del quadrato più grande in esso contenuto, caso che questo numero non sia un quadrato perfetto. Ciò messo si passi all' estrazione di una radice quadrata, operazione inversa della precedente.

§. 223. Sia dato il numero 3984, del quale si voglia la radice quadrata, o del massimo quadrato in essa contenuto, se non è un quadrato perfetto. Il suddetto numero 3984 come che è composto di più di due cifre, la sua radice ne avrà più d' una. Si divida il numero dato in tante coppie di cifre, quante potranno aver luogo da destra a sinistra, il numero di dette coppie di cifre dinoterà il numero preciso delle cifre della radice cercata. Diviso pertanto l' indicato numero in coppie, cominciando da destra e andando verso la sinistra, 39, 84 per mezzo di una virgola, è certo pel già detto che la prima cop-

pia 39 deve contenere il quadrato delle decine della radice o almeno prossimo.
Disposto il numero e'l luogo della radice come segue:

```
Quadrato supposto   39, 84        | Radice
                    36            ----------
                    ----          |  63
                    3 8 , 4       ------
                    3 6 9          123
                    ------
                      1 5
```

Si trovi la radice della prima coppia 39, ma come la tavola dimostra che 39 non è un quadrato perfetto, e che il massimo quadrato contenuto in questo numero è 36, la cui radice è 6, si scriva 6 alla radice ed il suo quadrato 36 sotto 39. La cifra 6 esprime le decine della radice del numero dato 3984. Sottratto 36 da 39 rimane 3 accanto del quale scritta la seconda coppia 84 si otterrà il numero 384, di cui si separi con virgola l'ultima cifra 4.

Avendo pertanto sottratto dal numero proposto il quadrato 36 delle decine della sua radice, il numero rimasto conterrà necessariamente il doppio delle decine multiplicato per le unità, più il quadrato delle unità della radice. È manifesto che il primo si conterrà in 38 si scriva sotto la radice 12, cioè il doppio delle 6 decine, e per questo si divida il solo 38, il che da 3 al quoto, esprimendo questo il numero delle unità. Scritta ancora presso il 12 la cifra 3 si avrà 123 il cui prodotto per 3 è 369, che può essere sottratto da 384, il residuo è 15, che dinota l'eccesso del numero 3984 sopra il quadrato di 63.

Quando il residuo non è zero, segno è che il numero proposto da estrarne la radice non è un quadrato perfetto.

Volendo essere certi dell'operazione, si faccia a tenore del §. 212, il quadrato delle 6 decine o 60 della radice, e quelle delle unità, cioè di 3 si prenda poi il doppio prodotto delle decine per le unità, ed a tutto questo aggiunto il residuo se vi è si troverà il risultato eguale al proposto numero, o sia, ciò che torna lo stesso, elevando l'ottenuto numero a quadra-

to: aggiuntovi in residuo se vi ha.

§ 224. Estrarre dal numero 53824 la radice quadrata e se il numero non è un quadrato perfetto, dal massimo quadrato che in esso è contenuto.

Disposto il tutto come nel primo esempio, e come quì si vede:

```
Quadrato supposto 5,38,24        | radice
                  4              |-----------
                  ---            |  | 232.
                  138            |  |-------
                  129            |   43.
                -------              462.
               =0924
                 924
              -------
                =00
```

Essendo il numero proposto espresso da più di quattro cifre, il numero delle decine della radice, che si cerca sarà composto da più di una cifra, ma le unità da una sola cifra, il che dovrà esser sempre lo stesso. Il quadrato pertanto del numero proposto conterrà il quadrato delle decine della radice, espressa da più di una cifra, più il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità. Il quadrato delle decine, essendo un numero di centinaia, sarà compreso nelle due prime divisioni 5, 38, la di cui radice si trova come nel primo esempio.

La radice di 5 e 2; da 5 tolto 4, che è il maggior quadrato contenuto in 5, rimane 1, accanto del quale si scriva la seconda coppia 38. Si divida il solo 13 per 4 doppio delle decine della radice, e 'l quoto 3 si scriva al luogo della radice, ed appresso al 4. Si multiplichi il 43 per 3 ed il prodotto 129, essendo minore di 138 si sottragga, per ottenere il residuo 9. Alla dritta del 9 si scriva l'ultima coppia 24 e si avrà 924, in cui si conterrà il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità. Si raddoppi il 23 numero delle decine della radice, ed il 46 si noti sotto della radice; per questo 46 si divida solo il 92, e 'l quoto 2 si noti alla

radice, ed accanto al 46. Si multiplichi 462 per 2, e 'l 924 si sottragga non essendo maggiore, ed essendo in questo caso eguale si otterrà zero per residuo, segno certo che il numero proposto era un quadrato perfetto.

Volendosi accertare dell' operazione si proceda a norma del §. 221, e si troverà il risultato eguale al proposto numero.

§. 225. Se dopo abbassata una coppia di cifre, si otterrà col residuo 3, 4, 5, ec. cifre, la divisione si farà sempre su tutte meno l' ultima, come si è dianzi praticato.

§. 226. Si osservi ancora, che dopo posta la prima cifra al luogo della radice, di non metterle accanto altra cifra, se prima non si prova per vedere, se è troppo grande, nel qual caso si deve diminuire di una, due, ec. unità.

§. 227. E tutte le volte che il doppio della radice trovata non potrà dividere le cifre del dividendo si metterà *zero* tanto alla radice, quanto presso del divisore, ed abbassata un' altra coppia di cifre si proseguirà l' operazione.

Dato il numero 41209 del quale si voglia la radice quadrata. Disposto il tutto come quì appresso si dica:

Quadrato supposto	4, 12, 0 9	Radice
	4	203
	0 1 2 0 9	403
	1 2 0 9	
	= 0 0 0	

La radice di 4 è due, che si nota al luogo della radice, il cui quadrato 4 tolto da 4, che è il massimo quadrato contenuto in 4 rimane 0; accanto si abbassi la seconda coppia 12. Si raddoppi la radice 2 delle decine, ed il 4 si scriva sotto la radice, ma non essendo 01 divisibili per 4, si metta *zero* alla radice, ed accanto del 4, e si abbassi l'ultima coppia 09. Si divida 120 per 40: il quoto è 3, che si metterà al luogo della radice e presso il 40. Si multiplichi 403 per 3 e 'l prodotto 1209 si sottragga, non vi ha residuo; dunque il numero proposto era un quadrato perfetto.

§. 228. È vidente che non vi ha operazione per la quale

si possa ottenere la radice esatta di un numero non quadrato e perciò quel residuo, che rimane servirà, come si è detto altrove, per poter aggiungere qualche altra quantità alla radice, trovata minore della vera, affinchè si accosti un poco più ad una certa esattezza, e sia il meno possibile erronea. In tal caso se il residuo è minore della radice trovata, si formerà una frazione in cui il residuo farà da numeratore, e'l doppio della radice da denominatore. Se poi il residuo fosse maggiore della radice trovata, lo stesso residuo sarà il numeratore della frazione, ed il doppio della radice più un' unità il denominatore.

§. 229. Tutti i numeri non sono quadrati perfetti, come risulta dalla tavola, il 38 p. e. non è un quadrato, la sua radice cade per conseguenza fra 6 e 7, dovendo essere maggiore di 6, e minore di 7, perciò se un numero non è un quadrato perfetto, o non ha radice, che possa esprimersi in numeri intieri, si potrà pure con le parti decimali determinare una radice, che sia poco diversa dalla vera. Per ottenere ciò si metterà alla destra del numero proposto una virgola, ed accanto a questo un doppio numero di zeri delle cifre decimali, che si vorrà ottenere alla radice. In seguito si estrarrà la radice dal numero proposto, come non vi fosse la virgola, ed ultimata l' operazione si dovrà separare alla destra della radice un numero di cifre decimali eguale alla metà degli zeri posti alla destra del numero proposto. Volendo pertanto la radice quadrata di 87567 in modo che differisca dal vero di poco p. e. di un millesimo, le si aggiunga sei zeri, e fatta l'operazione si troverà essere la radice quadrata 295, e 917 differente dal vero di un *millesimo*, poichè la radice cade fra 917 e 918.

§. 230. Se poi nel numero proposto vi fossero parti decimali, si porrà soltanto alla sua destra quel numero di zeri sufficiente a formare il doppio delle cifre decimali, che si vuole avere alla radice. Con la stessa regola si troverà la radice de' numeri, che contengono soltanto parti decimali, come se si volesse la radice del numero 0, 352.

Radice quadrata delle frazioni.

§. 231. Avendo appreso come si forma il quadrato di

una frazione, §. 215. fa d'uopo sapere come se ne trova la sua radice. Per ottenerla si estragga dai due termini della frazione la radice quadrata, e se ne faccia una frazione novella, questa sarà la radice della data frazione. La radice pertanto di $\frac{4}{25}$ è $\frac{2}{5}$; quella di $\frac{9}{49}$ è $\frac{3}{7}$; quella del rotto decimale. o. o36 è 6 millesimi; ma questo è il caso in cui il numeratore, e'l denominatore contengono un quadrato perfetto.

§. 232. Se poi il denominatore della frazione è un quadrato perfetto, comunque sia il numeratore, si estarrà la radice dal numeratore o dal maggior quadrato in esso contenuto e dal denominatore, formando di queste due radici una nuova frazione o esatta, o che differirà di poco, sia la frazione $\frac{37}{49}$, la sua radice sarà $\frac{6}{7}$, che poco differisce dalla vera.

§. 233. Se poi il denominatore non è un quadrato perfetto, si multiplichi il numeratore e 'l denominatore per lo stesso denominatore, il che non fa cangiar il valore.

Sia la frazione $\frac{7}{11}$ di cui si vuole la radice, essa diverrà $\frac{77}{121}$, di cui $\frac{8}{11}$ circa ne è la radice. Si nell'uno che nell'altro caso si potrà accostarsi quanto si vuole alla vera radice per mezzo delle decimali.

§. 234. Talora data una frazione voluta quadrata può sembrare che non sia, non vedendo di potersi estrarre la radice quadrata dai due termini, che la compongono, ma se riducasi la frazione ad una spressione più semplice, il che si è insegnato, la frazione si troverà essere un quadrato perfetto. Sia data la frazione $\frac{12}{48}$ si riduca alla sua più semplice spressione $\frac{4}{16}$ e si avrà per la sua radice. $\frac{2}{8}$

§. 235 E se la frazione in niun modo apparisce un quadrato, ma pure se ne voglia la radice, almeno inesatta, si multiplichi i suoi due termini pel denominatore, il che non le cangia il valore. Sia la frazione $\frac{3}{11}$, essa diverrà $\frac{33}{121}$ la di cui

radice è $\frac{5}{11}$, il che si riduce al caso del §. 232.

§. 236. Volendo estrarre la radice quadrata da un intero, cui va unita una frazione, si riduca l'intero e la frazione in una frazione, §. 102. Sia da estrarsi la radice da 6 $\frac{1}{4}$ queste quantità sono eguali a $\frac{25}{4}$ §. 102, la di cui radice quadrata è $\frac{5}{2}$ E se fosse da estrarsi da 3 $\frac{1}{3}$ = $\frac{10}{3}$ eguale a $\frac{30}{9}$ pel detto sopra, la sua radice quadrata inesatta sarebbe $\frac{5}{3}$.

§. 237. Si voglia determinare la radice di un numero intero, che non sia un quadrato perfetto a meno di un' unità frazionaria determinata. Sia il numero 3 di cui si dimanda la radice a meno di $\frac{1}{8}$ circa. Si riduca il numero 3 in una frazione, che abbia il quadrato di 8 per denominatore, e si avrà $\frac{3}{64}$; si multiplichi 3 per 64 e si otterrà $\frac{192}{64}$ la cui radice prossima è $\frac{13}{8}$, che non differisce dalla vera che di $\frac{1}{8}$ circa. La frazione $\frac{14}{8}$ è un poco più grande della vera radice, ma si accosta più.

Estrazione della radice cubica.

§. 238. Qualora si cerca la radice cubica di un dato numero, altro non si vuole che ritrovare un numero, il quale multiplicato pel suo quadrato dia per prodotto il numero voluto cubo, o il maggior cubo in esso contenuto, §. 204.

§. 539. Ogni numero composto di tre cifre ha per radice cubica un numero semplice, che trovasi nella tavola sopra esposta.

§. 240. Ogni numero espresso da più di tre cifre ne ha per necessità più di una alla sua radice cubica, così: 1000, che è il numero più piccolo di quei espressi con più di tre cifre, ha per radice cubica 10 composto di due cifre, perciò la radice cubica di qualunque numero, espresso da più di tre ci-

fre deve considerarsi come composta di decine, e di unità. E siccome il quadrato di un numero composto di decine, e di unità contiene il quadrato delle decine, più il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità, così per formare un cubo fa d' uopo moltiplicare ciascuna delle tre parti per le decine, e per le unità; quindi è che il cubo di un numero composto di decine, e di unità contiene il cubo delle decine il triplo del quadrato delle decine per le unità, il triplo del quadrato delle unità per le decine, il cubo delle unità, §. 214. Il cubo di 24 diviso in 2 e 4 darà le parti seguenti.

	8	cubo delle decine.
	48	triplo del quadrato delle decine per le unità
	9 6	triplo del quadrato delle unità per le decine
	6 4.	cubo delle unità.
Somma	1 3 8 2 4.	Cubo di 24.

Si passi ora agli esempi per rischiarare quanto si è detto.

Sia da estrarre la radice cubica dal numero 32, 768, o dal massimo cubo in esso contenuto. Dividasi il dato numero in tante tripole di cifre, quante possono aver luogo da destra a sinistra.

Cubo supposto	32768	radice cubica
	27	
	= 05768	32
	32768	
		27
	= 0000	

Il suddetto numero essendo composto di più di tre cifre, la sua radice cubica dovrà avere più di una cifra, avrà per conseguente delle decine, e delle unità. Dovrà pertanto il cubo delle decine contenersi in 32 pel §. 239. E come il massimo cubo contenuto in 32 è 27 la cui radice cubica è 3, si noti al luogo della radice, e sottratto il suo cubo 27 da 32 rimarrà 5. Accan-

to di 5 si scriva la seconda tripola e si avrà 5768, che dovrà contenere le rimanenti parti della radice. Si divida il 57 prime due cifre per 27 triplo del quadrato delle decine, e si scriva 2 accanto al numero 3 delle decine, qualora la cifra non sia troppo grande. Si faccia il cubo di 32, come si è detto, e si sottragga dal numero proposto, e siccome non vi è resto si può concludere che l'operazione è fatta a dovere, e che la radice cubica del numero proposto è 32.

Sia ora da estrarre la radice cubica del numero 94897584 e dal maggior cubo in esso contenuto.

Cubo supposto	94, 897, 584.	Radice cubica
	64	456.
	30 897.	
	91 125	48.
		6075.
	= 3 772, 584.	
	93571 200	
	1 329 384.	

Il numero proposto essendo espresso da un numero maggiore di cifre la sua radice conterrà delle decine, espresse da più di una cifra, e della unità, che sono sempre rappresentate da una sola cifra. É evidente che il cubo delle decine della radice è contenuto nel numero 94897 separato dalle ultime tre cifre, e volendo separare anche il 94 delle cifre a destra, esso conterrà il cubo delle decine della radice del numero parziale 94,897. Si passi ora ad operare.

Il massimo cubo contenuto nel numero 94 è 64 la cui radice cubica è 4, si scriva questa al luogo della radice, ed il suo cubo 64 si sottragga da 94. Accanto al residuo si abbassi la seconda tripola e si avrà 30897. Si faccia il quadrato delle decine 4 e si triplichi, ed il 48 si noti sotto la radice. Si divida per 48 le prime tre cifre 308, il quoto è 6, ma provato che è troppo grande, si scriva soltanto 5 alla radice. Si faccia il cubo della radice, 45 e si sottragga dal numero 94897 o sia, dalle due prime tripole, il residuo è 3772, accanto del quale si abbas-

si l'ultima tripola 584. Si faccia il quadrato delle decine e si triplichi; ed il 6075 che ne risulta si noti sotto la radice. Per questo si divida soltanto il 37725, ed il quoto 6 si scriva accanto alle decine della radice. Si faccia il cubo di 456 radice e si sottragga dal numero proposto, il residuo è 1326384. L'operazione è terminata, perciò 456 è la radice del maggior cubo contenuto nel numero proposto, poichè questo supera il cubo della radice del numero dianzi accennato.

§. 240. Tutte le volte che il triplo quadrato della radice non può esser divisore del numero da dividersi, si scriva zero alla radice, e si prosegua l'operazione.

§. 241. Se un numero non è un cubo perfetto, e si voglia ottenere la sua radice cubica, prossima il più possibile si farà uso delle decimali mettendo alla destra del numero, separati da virgola, tre volte altrettanti zeri quante cifre decimali si vuole avere alla radice; indi si estragga la radice cubica, come se non vi fosse la virgola, ed ultimata l'operazione si separi alla destra con virgola un numero di cifre decimali eguale al terzo del numero degli zeri.

§. 242. Se poi il numero contenesse delle cifre decimali, allora non si scriverebbe alla sua destra che quel numero sufficiente di zeri per avere tre volte altrettante cifre decimali, quante se ne richiede alla radice.

§. 243. E se il numero contenesse soltanto delle parti decimali, allora si scriverebbe solo tre zeri alla dritta del numero proposto, come: dato o . 045, si farà o . 45000, ed in questo caso estratta la radice si troverà di o . 35 circa.

Estrazione della radice cubica delle frazioni.

§. 244. Si otterrà la radice cubica di una frazione estraendo dal numeratore e dal denominatore della frazione data la radice cubica, formando di questi due termini una nuova frazione, così data la frazione $\frac{8}{27}$, la sua radice cubica sarà $\frac{2}{3}$; quella di $\frac{1}{8}$ è $\frac{1}{2}$; e quella del rotto decimale o . 0216, è 6 centesimi, ma non sempre i due termini della frazione sono cubi perfetti.

§. 245. Se il denominatore è un cubo perfetto, comun-

que sia il numeratore, si estragga la radice cubica o esatta, o prossima dal numeratore e dal denominatore, la nuova frazione composta delle due radici, sarà la radice richiesta.

§. 246. Se il denominatore non è un cubo perfetto, si multiplichi il numeratore e 'l denominatore pel quadrato del denominatore, il che non cangia il valore, e si otterrà un'altra frazione, il cui denominatore sarà un cubo perfetto. Sia la frazione $\frac{5}{9}$, di cui il denominatore non è un cubo perfetto, essa diverrà operando come si è detto $\frac{405}{729}$, si prenda la radice cubica prossima del numeratore, che è 7, la esatta del denominatore, che è 9, e si avrà la frazione $\frac{7}{9}$, che poco differisce dalla vera. Si potrà approssimarsi quanto si vuole alla vera radice in tutti e due i casi, servendosi delle parti decimali.

§. 247. Si dovrà ridurre la frazione data ad una spressione più semplice, quando non mostra i suoi termini cubi perfetti, poichè in tal modo potranno divenire, sia la frazione $\frac{3}{24}$, questa ridotta ad $\frac{1}{8}$, la sua radice cubica perfetta è $\frac{1}{2}$.

§. 248. Sia da estrarsi la radice cubica da un intero con frazione, come da $4\frac{17}{27}$, queste quantità essendo eguali à $\frac{125}{27}$ §. 102, la radice cubica sarà $\frac{5}{3}$.

§. 249. Volendo la radice cubica di un numero come 3, che non è un cubo perfetto, e che differisca dalla vera di $\frac{1}{15}$ circa; si faccia del 3 una frazione, che abbia il cubo di 15 per denominatore, e 'l prodotto di 3 pel cubo per numeratore, la di cui radice prossima si troverà essere $\frac{21}{15}$, diversa dalla vera del 3 di $\frac{1}{15}$.

Dei rapporti e delle proporzioni.

§. 250. In due maniere si può paragonare due grandezze, della medesima specie però, 1 *Aritmeticamente*, o *Geo-*

metricamente per conoscere che è una per rispetto dell' altra.

§. 251. Se si considera di quanto una grandezza supera l'altra o è superata dall' altra, il paragone è aritmetico, tale è quello di 12 con 5, che si fa per conoscere di quanto la prima grandezza eccede la seconda o vero la loro differenza 7, che perciò 7 è il risultato di tal paragone o sia il *rapporto* aritmetico di 12 a 5, che s' indica mettendo un punto fra le due grandezze, così: 12. 5.

§. 252. Se si considera qual parte o quali parti una grandezza sia d' un altra o pur questa di quella, il paragone è geometrico, tale è quello di 15 con 5, che si fa per conoscere quanto la prima contenga la seconda o la seconda si contiene nella prima, ed il numero 3, che esprime tale continenza si chiama *rapporto*, *ragione* geometrica o *ragione* di un numero all' altro, e tal ragione si rappresenta ponendo due punti tra l' una e l' altra grandezza, così 15 : 5.

§. 253. *Rapporto* o *ragione* adunque altro non è che il risultato del confronto di due grandezze della medesima specie.

§. 254. In ogni rapporto la prima grandezza, che si enuncia o si scrive chiamasi antecedente, e la seconda conseguente, e i due numeri detti son termini del rapporto.

§. 255. La *differenza* aritmetica, che passa tra l' antecedente ed il conseguente scrivesi ad uso di sottrazione; la differenza aritmetica di 7. 2 si scrive $7 - 2 = 5$.

§. 256. La *ragione* geometrica si scrive ad uso di frazione, come $\frac{5}{12}$ o $\frac{12}{5}$, dei quali valori si parlò §. 91 e 92, vale a dire che la ragione geometrica è una frazione per cui i due termini di una proporzione geometrica rappresentano una divisione o il quoto, che si ottiene dividendo l' antecedente pel conseguente. Di fatti nel primo caso la ragione di 5 : 12 è il rotto $\frac{5}{12}$, il quale dinota che l' antecedente della ragione rappresenta cinque parti delle dodici eguali in cui è diviso il conseguente dodici della medesima ragione. Nel secondo la ragione di 12 : 5 è il rotto $\frac{12}{5}$, il quale esprime che l' antecedente 12 è eguale al doppio del conseguente 5 più due delle parti in cui è supposto diviso il conseguente 5.

§. 257. Perciò se due o più numeri, divisi o multiplicati rispettivamente per altrettanti, diano quozienti eguali o interi, o rotti si dirà che quelli hanno ragioni eguali a questi come $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, e $\frac{12}{6}$ e $\frac{8}{4} =$ ciascuna ad $\frac{1}{2}$ ed i numeri, che fanno da antecedenti saranno proporzionali con gli altri, che ne sono i conseguenti; ma sarà poi maggiore quella ragione, il di cui quoziente supera quello dell' altra, così: $\frac{3}{12}$: maggior di $\frac{2}{10}$, e $\frac{12}{3}$ maggiore di $\frac{10}{5}$.

§. 258. Laonde per *proporzione* intender si deve l'eguaglianza di due rapporti o ragioni: questa sarà aritmetica, o geometrica, secondo che i rapporti, che vi si considera sono aritmetici, o geometrici.

Le quattro quantità 9. 11 : 14. 16 formano una proporzione aritmetica, perchè la differenza fra le due prime è eguale a quella che passa tra le seconde, e l'anzidetto modo e l' uso di scriverle, annunciandole 9 sta a 11 aritmeticamente come 14 sta a 16.

§. 259. Le quattro quantità 3 : 12 : : 4 : 16. formano una proporzione geometrica, poichè 3 è contenuto in 12 egual numero di volte che il 4 in 16, o sia che $\frac{3}{12} = \frac{4}{16}$ §. 256, e queste si scrive, come si vede per distinguerle dalle aritmetiche, e l' uso è di profferirle: tre sta a dodici geometricamente, come quattro sta a sedici.

E come un rapporto geometrico è indicato con una frazione, nella quale il numeratore è l' antecedente, e 'l denominatore il conseguente, e l' ugnaglianza di due rapporti costituisce una proporzione, si può dunque formare una proporzione geometrica con due frazioni eguali come: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, o sia 15: 20 : : 3 : 4.

§. 260. Il primo e l' ultimo termine della proporzione son detti estremi, il secondo ed il terzo medi.

§. 261. Essendovi in una proporzione due rapporti vi debbono essere per conseguenza due antecedenti, e due conseguenti.

§. 262. Quando i due termini medi di una proporzione sono eguali, la proporzione dicesi continua, così : 3. 7 : 11,

formano una proporzione aritmetica continua, e l'uso è di scriverla ÷ 3. 7. 11.

La proporzione 5 : 15 : : 15 : 45 è una proporzione geometrica continua, e scrivesi ∺ 5 : 15 : 45. Il segno posto innanzi sì all' una che all' altra serve, per accennare che leggendo si deve ripetere il termine medio due volte.

§. 263. In ogni proporzione aritmetica la somma degli estremi è eguale alla somma de' medi, p. e. nella proporzione 5. 9 : 10. 14 ciascheduna delle somme 5 e 14 degli estremi, e 9 e 10 de' medi è eguale a 19.

§. 264. Nella proporzione aritmetica continua, essendo i due medi eguali, la somma degli estremi è eguale al doppio del termine medio, ed al contrario, ec. Volendo pertanto un medio aritmetico fra 9, e 17, si addizioni i due numeri dati, e della somma 26 si prenda la metà 13, e si avrà ÷ 9. 13. 17.

§. 265. In una proporzione aritmetica qualunque, essendo cogniti tre termini, si troverà sempre il quarto. Si supponga che cerchisi un estremo, esso si ottiene, se della somma de' medi si sottra l' estremo cognito, e conoscendo i due estremi ed un medio si otterrà l' altro medio col sottrarre dalla somma degli estremi il medio cognito.

E delle proporzioni aritmetiche è detto quanto basta, si parli ora le geometriche a cui meglio giova attenersi, che spianano tutte le difficoltà per la perfetta intelligenza della regola di tre.

§. 266. In ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi è uguale a quello de' medi; nella seguente proporzione 3 : 15 : : 7 : 35. il prodotto di 3 $\times$ 35 è eguale a quello di 7 $\times$ 15, cioè ciascuno eguale a 158 per essere i due prodotti composti degli stessi fattori, ed eccone la pruova:

Una ragione geometrica è il quoziente, che si ottiene dalla divisione dell' antecedente pel conseguente, perciò il conseguente di una ragione è eguale al numero esprimente questa ragione multiplicato per l' antecedente, così essendo 8 la ragione di 5 : 40, il conseguente 40 è eguale all' antecedente 5 multiplicato per la ragione 8; ciò messo, come in ogni proporzione geometrica 4 : 8 : : 6 : 12 il secondo termine 8 è eguale al primo multiplicato per la ragione 2, ed il quarto 12 è eguale al terzo multiplicato pure per la ragione 2., ne

siegue che il prodotto degli estremi 4 e 12 è eguale al primo termine multiplicato pel terzo e per la ragione; del pari il prodotto de' medi 8 e 6 sarà eguale al primo termine multiplicato pel terzo e per la ragione. Essendo pertanto questi due prodotti composti degli stessi fattori devono necessariamente essere eguali, per cui si può prendere un prodotto per l' altro.

§. 267. Se il primo termine di una proporzione è l' unità, il quarto termine sarà eguale al prodotto de' medi, così nella proporzione 1 : 2 : : 8 : 16 il prodotto di 2×8 è eguale a 16 quarto termine.

§. 268. In ogni proporzione geometrica continua il prodotto degli estremi è eguale al prodotto di uno de' termini medi multiplicato per se stesso, o sia al quadrato di quello. Per ottenere pertanto un medio geometrico fra due numeri dati fa d' uopo multiplicare questi insieme e dal loro prodotto estrarre la radice quadrata, così dati i due numeri 3 e 12 e vogliasi il medio geometrico si multiplichi 3 per 12 e dal prodotto 36 estratta la radice quadrata, che è 6, questo numero sarà il medio geometrico, e si avrà $\div\div$ 3. 6. 12.

§. 269. In ogni proporzione geometrica, conoscendo i primi tre termini, si voglia il quarto, si deve multiplicare il secondo termine pel terzo, e dividere il prodotto pel primo, come dati i tre termini 2. 4. 6. si otterrà il quarto facendo $4 \times 6 = \frac{24}{2} = 12$ quarto termine, di modo che si ha 2 : 4 :: 6 : 12 pel già detto sopra. Di fatti la prima ragione è $\frac{4}{2}$, e la seconda è $\frac{12}{6}$, questi divisi per 3 danno $\frac{4}{2}$ egualmente, e così dicasi di qualunque altra proporzione.

§. 270. Se poi il termine, che si cerca è uno de' medi, si multiplichi i due estremi, e 'l prodotto si divida pel medio cognito.

§. 271. Se quattro grandezze non sono in proporzione geometrica il prodotto degli estremi non può esser mai eguale al prodotto de' medi, poichè essendo per le ragioni disuguali, i prodotti non hanno fattori eguali e perciò debbono essere disuguali.

§. 272. Ma quando quattro grandezze sono tali che il pro-

dotto degli estremi è eguale al prodotto de' medi, le quattro quantità sono proporzionali, ed esse resteranno sempre tali, mettendo gli estremi nel luogo de' medi ed i medi nel posto degli estremi, ed anche in qualunque altra maniera, purchè i termini serbino la proporzione suddetta: sia d'esemplo la proporzione seguente, che dà tutte le proporzioni, che ne seguono con la permutazione soltanto de' suoi termini.

Proporzione	4 : 8 : : 12 : 24
Darà primamente	8 : 4 : : 24 : 12
Inoltre	4 : 12 : : 8 : 24
	24 : 12 : : 8 : 4
	24 : 8 : : 12 : 4
	8 : 24 : : 4 : 12
	12 : 4 : : 24 : 8
	12 : 24 : : 4 : 8

Lo stesso è di qualunque proporzione

§. 273. Dai suddetti cambiamenti fassi manifesto potersi multiplicare o dividere i due antecedenti per un medesimo numero senza alterarne la proporzione, e che lo stesso è pe' conseguenti, sendo che in questo è lo stesso che multiplicare, o diminuire, o dividere i due termini di una ragione per uno stesso numero, come chiaro rilevasi dal detto sopra, e dall' esemplo seguente; sia la proporzione: 4 : 8 : : 12 : 24 dividendo per 2 i due antecedenti si avrà 2 : 8 : : 6 : 24, giacchè dalla proporzione 4 : 8 : : 12 : 24 si può inferire 4 : 12 : : 8 : 24, e dividendo i due termini della prima ragione per 2 sarà 2 : 6 : : 8 : 24. Serbandosi la stessa proporzione. Lo stesso vale per le uguali frazioni, così

$\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$, e $\frac{15}{6} = \frac{20}{8}$ in cui i conseguenti sono multiplicati per 2.

§. 274. Qualunque altro cangiamento fatto in una proporzione, che indichi eguale aumento o diminuzione in cia-

scuno de' termini tanto della prima ragione che dalla seconda, non toglie l' eguaglianza delle due ragioni così della suddetta proporzione:

$$4 : 8 :: 12 : 24$$

si avrà . . . . $4 : 8+4 :: 12 : 24+12$

e . . . . . . $4 : 8-4 :: 12 : 24-12$

Lo stesso ragionamento avrà luogo ponendo l'antecedente di ciascheduna ragione nel luogo del suo conseguente, e 'l conseguente nel posto dell' antecedente. E siccome questo cambiamento non altera la proporzione, così si potrà inferire, che i due antecedenti sieno fra loro come i due conseguenti, e pel numero 274 un antecedente starà alla somma, o differenza degli antecedenti, come il respettivo conseguente alla somma, o differenza de' conseguenti, cioè $4 : 12 \pm 4 :: 8 : 24 \pm 8$, e pel §. 272, cambiando il posto ai termini medi $12 \pm 4 : 4 :: 24 \pm 8 : 8$; e $12 \pm 4 : 4 :: 48 \pm 16 : 12 \pm 4$, vale a dire un antecedente al suo conseguente, come la somma, o differenza degli antecedenti alla somma o differenza de' conseguenti, da cui si deduce che poste più ragioni eguali, la somma di tutti gli antedecenti è alla somma de' conseguenti, come un antecedente al suo conseguente.

§. 275. Dal già detto si può inferire ancora che se due proporzioni hanno i medesimi antecedenti, i loro conseguenti saranno proporzionali, e viceversa, così date le due proporzioni . . . . $3 : 9 :: 4 : 12$

$$3 : 18 :: 4 : 24$$

Si avrà pel §. 272. $3 : 4 :: 9 : 12$

$$3 : 4 :: 18 : 24$$

E quindi . . . $9 : 12 :: 18 : 24$

§. 276. Se due proporzioni hanno i medesimi estremi, i loro medi saranno reciprocamente proporzionali, e viceversa, così dalle seguenti proporzioni:

$$4 : 8 :: 6 : 12$$

$$4 : 16 :: 3 : 12$$

Si avrà . . . $8 : 16 :: 3 : 6$

§. 277. Se si multiplichi gli antecedenti ed i conseguenti fra loro di due o più ragioni, la ragione de' prodotti, che risultano, si chiama composta, e eguale al prodotto delle ragioni componenti: la ragione di 2 : 6 è 3, quella di 4 : 8 è 2, e $2 \times 3 = 6$, che è la ragione 8 : 48 prodotti degli antecedenti e conseguenti.

§. 278. Se le ragioni, che si multiplica, sono due ed eguali, allora la ragione composta si chiama *duplicata*, se tre, *triplicata*, ec. così se si multiplichi la ragione di 2 : 4 con quella di 3 : 6 si avrà la ragione composta di 6 : 24, e sarà la duplicata della ragione di 2 : 4, e di 3 : 6, eguale a 4.

§. 279. Se abbiasi due proporzioni, e si multiplichi per ordine i termini, cioè il primo dell' una pel primo dell' altra, ec. i prodotti risultanti saranno in proporzione, così date le

proporzioni (2 : 4 : : 3 : 6
(4 : 8 : : 6 : 12
Si avrà . . . 8 : 32 : : 18 : 72

§. 280. Da ciò può dedursi che i quadrati, i cubi e le potenze simili di quantità proporzionali sono pure proporzionale così multiplicando la quì sopra proporzione 2 : 4 : : 3 : 6, una, due, più volte per se stessa, si otterrà la proporzione della potenza seconda, terza, quarta ec. come:

2 : 4 : : 3 : 6
quadrato . . . 4 : 16 : : 9 : 36
Cubo . . . 8 : 64 : : 27 : 216

Del pari le radici aventi le stesse condizioni saranno proporzionali come il fa chiaro la proporzione 2 : 4 : : 3 : 6.

Uso delle proporzioni nella soluzione de' problemi aritmetici.

§. 281. L' operazione, che si fa, allorchè dati tre numeri di una proporzione si cerca il quarto, chiamasi *regola*

di tre. La *regola di tre* esser può diretta, o inversa, e l'una e l'altra o semplice, o composta.

Regola di tre diretta semplice.

§. 282. Si dice essere due quantità in ragione *diretta*, quando a misura che l'una cresce o diminuisce, cresce o diminuisce anche l'altra; per l'avverso si dice essere due quantità in ragione *inversa*, o reciproca quando a misura che l'una cresce, l'altra diminuisce, o a misura che diminuisce l'una, cresce l'altra.

Essendo infinite le quistioni da proporsi, che si scioglie col mezzo delle proporzioni, è necessario prima di ben conoscere se il quesito appartenga alla regola della proporzione *diretta*, o a quella *inversa*.

Si deve avvertire ancora a tre cose nella *regola* di *tre*: alla disposizione, alla multiplicazione, e divisione. La disposizione, consiste nel porre per terzo termine quel numero su cui cade la dimanda; per primo il termine delle medesima specie del terzo, e per secondo il termine, che è conseguente del primo, e della medesima specie del quarto, che si cerca; delle altre due si parlerà all'uopo, ed ecco il modo di disporre i suddetti termini:

Esemplo.

Paulo avendo posto in una banca duc. 1725. ebbe il profitto di duc. 86. 5., si dimanda di quanto questo fruttato sarebbe aumentato, se avesse posto nella medesima banca ducati 7390.

La dimanda cade su l'ultimo capitale, perciò questo è terzo termine, il primo è l'altro capitale impiegato della natura del terzo, ed il secondo, conseguente del primo termine, è il profitto ottenuto del primo capitale, perciò se ducati 1725 hanno reso ducati 86. 5., ducati 7390 quanto?

Si multiplichi ducati 7390 per 86. 5. ed il prodotto 635909, 5 si divida per ducati 1725 e si avrà per quarto termine ducati 368. 64. $\frac{505}{1725}$, che indica l'aumento sopra ducati 86. 5. richiesto.

Altro quesito.

Se 24 operai hanno compito in un certo tempo 14 canne di fabbrica, quante canne ne faranno nell' istesso tempo 48 operai?

Si noti come sopra che de' tre termini, il primo ed il terzo sono della medesima specie, e che devono esser sempre in qualunque quesito, ed il secondo è quello che si dimanda parimenti della medesima specie, e se ciò non fosse si dovrà ridurre l' una alla natura dell' altro.

Nel suddetto quesito il 24 ed il 48 sono della medesima specie, perchè ambidue dinotano operai, il 14 per esser solo ad esprimere una cosa diversa, chiamasi ancora *solitario*, il quale deve essere della medesima specie del quarto, che si cerca. Ciò messo è evidente che quanto il primo termine è maggiore o minore del terzo, tanto il secondo dovrà essere maggiore o minore del quarto, giacchè quanto è maggiore il numero de' lavoratori, tanto maggior lavoro si farà in un dato tempo, e per conseguenza questo quesito appartiene alla regola di tre diretta semplice, dovendoli ordinare come segue: $24 : 14 :: 48 : x$, vale a dire ponendo nel primo luogo il termine del supposto simile al terzo su cui cade la dimanda, il 14 o vero il *solitario* nel secondo luogo e fatta l'operazione si avrà $24 : 14 :: 48 : 28$. Da ciò si rileva che quanto maggiore è il numero degli uomini impiegati al lavoro, tanto è maggiore il numero delle canne che si fa in un dato tempo, come si cennò. Volendone la pruova si faccia $48 : 28 :: 24 : x$ e si otterrà per quarto 14.

Quesito.

Si è comprato $\frac{5}{8}$ di una canna di tela per la somma di 15 Tarì, quanto costeranno $\frac{7}{8}$ di una canna della stessa tela?

$\frac{5}{8} : \frac{7}{8} :: 15 : x$, o $5 : 7 :: 15 : x = 21$ Tarì.

Regola di tre inversa semplice.

§. 283. Talora accade che i termini di una proporzione

non seguono l'ordine retto; ma essendo il primo maggior del secondo, il terzo debba essere minore del quarto e viceversa, ed in tal caso la proporzione dicesi *inversa*, §. 282, o reciproca e ciò accade, quando si cerca il tempo, ed altro necessario a qualche operazione, così nel seguente

Quesito.

Per fare un tale scavo in quindici giorni si deve avere venti lavoratori, si dimanda quanti ve ne dovrebbero essere per farlo in dieci?

È chiaro che quanto è minore il tempo, tanto più dovranno essere i lavoratori, dal che si deduce che la regola è inversa, giacchè il tempo, che si deve impiegare nel detto lavoro, è in ragione inversa della quantità de' lavoratori. Si disponga pertanto i termini dati nel modo seguente.

Se per 15 giorni vi vogliono 20 lavoratori, quanti ve ne vorranno per 10? perciò $15 \times 20 = \frac{300}{10} = 30$ numero cercato, ed è evidente che 15 è di 10 ciò che 20 è di 30.

Quesito.

Caio vuol farsi un abito di panno, se questo è largo palmi $6\frac{1}{2}$ il sartore ne vuole 14 palmi, si dimanda essendo largo palmi 7 quanti ve ne vorranno?

Soluzione $6\frac{1}{2} \times 14 = \frac{91}{7} = 13$ quarto termine cercato.

Quesito.

Facchini 40 hanno impiegato 30 giorni a vuotare un magazzino, quanti giorni vi avrebbero impiegati 30 facchini?

Soluzione $40 \times 30 = \frac{1200}{30} = 40$ quarto termine cercato.

In tutti i due casi l'effetto è lo stesso, ma è chiaro che vi vorranno meno giorni per più facchini, e tanti palmi di meno del panno più largo.

Quesito.

Diciotto operai hanno fatto un certo lavoro in 12 giorni; si dimanda in quanti si sarebbe fatto il medesimo lavoro impiegandovi 24 operai?

Soluzione $18 \times 12 = \frac{216}{24} = 9$, quarto termine cercato.

Questo quesito può risolversi ancora nel seguente modo: è chiaro che quanti più sono gli operai tanti giorni di meno s' impiega pel suddetto lavoro, perciò il rapporto de' due numeri degli operai deve esser preso in un ordine inverso a quello de' giorni, che s' impiega a lavorare, vale a dire che i 18 operai stanno ai 24 operai, come i giorni impiegati da questi ai giorni impiegati da' primi, che perciò il rapporto de' numeri degli operai è inverso a quello de' giorni, quindi si faccia la seguente proporzione $18 : 24 :: x : 12.$, multiplicati pertanto gli estremi e diviso il prodotto pel medio $18 \times 12 = \frac{216}{24} = 9$ come sopra.

Regola di tre diretta composta.

§. 284. Accade che nell' enunciato di un quesito, vi siano cinque, sette o più termini, dovendo con questi trovare il numero cercato; vi saranno perciò due proporzioni se sono cinque, e tre se sono sette ec. le quali si compone in una sola con la multiplica, e perciò dicesi regola composta, come ne' seguenti.

Quesiti.

Se dodici operai hanno fatto in 6 giorni 20 canne di fabbrica, quante canne ne farebbero 18 operai in 15 giorni?

In simili quesiti ciò che indica tempo, come 6 giorni, o altra cosa necessaria è un accessorio o vero una circostanza del quesito, la quale unita ai 12 operai, forma la causa del primo effetto, che sono le venti canne di fabbrica, ed i 15 gior-

ni, e li 18 operai sono la causa del secondo effetto, il quale è il numero incognito delle canne da farsi in 15 giorni dai 18 operai.

I quesiti di tal sorta si deve risolvere in due per operare con più certezza, escludendo prima le circostanze, e facendo del rimanente un quesito.

Si potrà pertanto dire: se 11 operai hanno fatto 20 canne di fabbrica, 18 operai quante ne farebbero? Secondamente se in 6 giorni si fa tanto lavoro, in giorni 15 quanto se ne farà? Or per avere la soluzione esatta del quesito fa d' uopo conoscere se il quesito spogliato delle circostanze appartiene alla regola di tre diretta, o all' inversa; e se il quesito delle circostanze appartenga alla regola di tre diretta o inversa: ciò comprende due casi:

1. O tutti e due i quesiti appartengono alla regola di tre diretta.

2. O uno alla diretta e l' altro all' inversa.

Nel primo caso, in cui tutti e due i quesiti appartengano alla regola di tre diretta, si multiplichi ciascuno di quei della medesima specie per la sua circostanza e si otterrà due numeri, indi posto il secondo termine, o vero il solitario nel mezzo si operi come nella regola di tre diretta. Perciò nell' addotto quesito $12 \times 6 = 72$ sarà primo termine, il 20 o vero il solitario per secondo termine, e 'l terzo sarà $15 \times 18 = 270$, si faccia poi questa proporzione $72 : 20 :: 270 : x$ o sia al quarto termine, che si troverà essere 75. E volendo la pruova si multiplichi i due estremi ed i due medii, i di cui risultati dovranno trovarsi eguali.

Nel secondo caso in cui un quesito appartenga alla diretta e l' altro all' inversa, si multiplichi il primo termine per la circostanza del secondo, e 'l secondo termine per la circostanza del primo, e posto il così detto solitario nel mezzo, si operi come nella regola di tre diretta.

Quesito.

Dieci operai per aprire un canale devono asciugare, 5 piedi di acqua ogni giorno per fare in un certo tempo 120 canne di lavoro; quante ne faranno nello stesso tempo 35 operai obbligati di asciugare 9 piedi di acqua al giorno?

Per meglio intendere il quesito si risolve in due, come si cennò.

1. Se dieci operai hanno fatto in un certo tempo 120 canne, 35 operai quante ne faranno nello stesso tempo? e questo quesito appartiene alla regola di tre diretta.

2. Se asciugando 5 piedi di acqua al giorno si fanno in un certo tempo tante canne di lavoro, quante se ne faranno asciugando 9 piedi di acqua al giorno? e questo secondo quesito appartiene alla regola di tre inversa, perchè il lavoro cresce quanto è minore il consumo del tempo impiegato per asciugare l' acqua, e diminuisce quanto questo ostacolo cresce, perciò si dovrà multiplicare 10 per $9 = 90$ primo termine, poi $5 \times 25 = 125$ sarà il secondo termine e posto il 120 nel mezzo si avrà la seguente proporzione $90 : 120 :: 125$ al quarto proporziale cercato, che sarà $166 \frac{60}{90}$ o sia $\frac{2}{8}$ di canna.

Da i due quesiti si è potuto rilevare che se la proporzione contiene cinque termini, essa è composta di due proporzioni, ma essendo di sette ne contiene tre, e così di seguito, come nel seguente

Quesito.

Uomini 16 in giorni 20 lavorando ore 8 al giorno hanno fabbricata una muraglia lunga canne 600, larga canne 2, alta canne 8, si dimanda in quanti giorni sarà fabbricata un' altra muraglia lunga canne 750, larga canne $1. \frac{1}{2}$ alta canne 9 da uomini 28. lavorando ore 10. al giorno?

Spiegazione del quesito.

La lunghezza, larghezza ed altezza della muraglia quanto è maggiore richiede tanto maggior numero di giorni per fabbricarla ed è perciò in ragione diretta; ma il numero degli uomini e delle ore di lavoro quanto è maggiore richiede tanto minor numero di giorni, e perciò è in ragione inversa.

Disposto pertanto il quesito come segue.

16. 8. 600. 2 8. | giorni 20 | 28. 10. 750. $1\frac{1}{2}$. 9.

E fatta l'operazione a norma di quanto si è detto, si troverà che il quoto della divisione dà giorni 9, ore 6, minuti 25, ed una piccola frazione, e percio la muraglia si compirà in questo tempo, ec.

Alcune regole che si riducono a quella di tre.

Regola d' Interesse.

§. 285. Si chiama interesse o frutto il tanto che si paga per ragion del capitale o sia di una certa somma, che si è presa a condizione di pagare un tanto per 100 all'anno o al mese, ec. Con questa regola si apprende a saper determinare la somma dovuta pei diversi capitali, presi, o dati a condizioni diverse.

Quesito d' interesse semplice.

Tizio ha dato ducati 78 a condizione di pagargli per questi l' 8 per 100 all' anno, si dimanda: quanto si dovrà alla fine dell' anno pei 78 ducati?

Si faccia primamente la seguente proporzione. Se ducati 100 alla fine dell' anno sarebbero divenuti 108, quanto diverranno li 78? dunque 100 : 108 : : 78 : x o sia al quarto proporzionale, che sarà 84 duc. e grana 24, da cui tolti i 78, si otterrà per l'interesse di un anno de' ducati 78 ducati 6 e grana 2. Secondamente si potrà fare le seguente proporzione: 100: 8 : : 78 : x e si otterrà egualmente lo stesso quarto proporzionale in ducati 6, e grana 24.

La stessa regola vale per ogni sorta di moneta.

Dato adunque un capitale qualunque, e l' interesse annuo per ogni 100, si troverà sempre l' interesse di questo capitale con la proporzione sopra enunciata.

§. 278. Si può abbreviare con la multiplica questa operazione, multiplicando il capitale, di cui si va in cerca dell' interesse, per l'interesse annuo, e staccare poi dal prodotto due cifre della parte destra, il che equivale alla divisione per 100, le cifre alla sinistra dinoteranno duc. e le cifre tolte alla destra grani. Nell' esemplo addotto il capitale era 78, l'interesse annuo 8, per cui multiplicato il 78 per 8 si ha duc. 624. o ducati 6. 24. a norma di quanto si è insegnato, il che corrisponde a quello ottenuto sopra coll' altra regola.

§. 279. Se nel solo capitale vi saranno i grani si multiplichi il capitale per l'interesse e dal prodotto si stacchi quattro cifre dalla parte destra, le rimanenti alla sinistra saranno duc. e delle quattro tolte, le prime due grani, e le altre due parti di grano, come lo dimostra il seguente

Quesito.

Quanto rende un capitale di ducati 24, e grana 6 all'8 per 100 all' anno? Si riduca prima i ducati in grani, ed al risultato vi si aggiunga i 6 grani, ciò darà grana 2406, che multiplicati per 8 daranno grana 19248, cioè ducati. 1. grana 92, e $\frac{48}{100}$ di grano.

§. 280 Se i grani fossero nel solo interesse, si operi come nel quesito precedente, facendo de' ducati, e de' grani un sol numero, multiplicando poi per questo il capitale.

§. 281. E se i grani saranno nel capitale, e nell'interesse, si multiplichi il capitale per l'interesse, ambi ridotti in grani, e dal prodotto totale si stacchi sei cifre, come nel seguente

Quesito.

Quanto renderà un capitale di ducati 75. e grana 4 rendendo per ogni 100 duc. 7. e grana 6? si risponde ducati 5, grana 19, $\frac{78}{100}$ di grano, ed una frazione non valutabile.

§. 282. Con queste regole date si potrà trovare l'inte-

resse di un capitale impiegato per anni, e mesi, o per soli mesi, o per soli giorni, come lo dimostrano i seguenti quesiti

Quesito I.

Qual sarà l'interesse di un capitale di ducati 235. impiegato alla ragione di ducati 6, e grana 50 per ogni 100 per un anno e 8. mesi?

Si trovi l'interesse del capitale di un anno, come sopra si è indicato, e si dica: se dodici mesi rendono tanto., quanto renderanno 8? e si troverà che per un anno renderà ducati 15. 27. $\frac{50}{100}$, e per li 8 mesi duc. 10. 18. $\frac{33}{100}$.

§. 233. Se lo stesso capitale fosse stato impiegato per due, tre, o più anni, e mesi, si trovi prima l'interesse di un anno, pel §. precedente, e si multiplichi pel numero degli anni, in seguito quello de' mesi, pure pel §. precedente, e si otterrà la somma de' due interessi, così per due anni riverebbe duc. 30. 55, per tre mesi duc. 3. 81. 8. $\frac{6}{8}$.

§. 284. E finalmente se il medesimo capitale fosse stato impiegato per giorni 15; si trovi il fruttato del capitale di un anno, e si dica poi: se 365 giorni rendono tanto, quanto renderanno giorni 15? e si troverà essere duc. — grana 63 e $\frac{64}{100}$.

§. 285. Se poi si voglia sapere da qual capitale impiegato a un tanto per 100 si possa avere ogni anno una data rendita; si porrà per primo termine l'interesse convenuto, pel secondo 100, e pel terzo la rendita desiderata come nel seguente

Quesito.

Da qual capitale al 4 per 100 si potrà avere ogni anno la rendita di duc. 260?

Si faccia : 4 : 100:: 260: x e fatta l' operazione si avrà per quoto ducati 6500.

Si ottiene l' istesso, se alla rendita, desiderata si aggiunga due zeri, e si divida poi il prodotto per l' interesse convenuto.

§. 286. E se dato il capitale e la rendita di ciascun anno si voglia sapere a qual interesse per 100 debba impiegarsi il capitale, allora il primo termine sarà il capitale, il secondo la rendita annuale, ed il terzo 100 come:

Quesito.

A qual interesse per 100 dovrà impiegarsi duc. 6500, perchè rendano ogni anno duc. 260?

duc. 6500 : duc. 260 : : 100 : x, che si troverà esser 4 per 100.

Egualmente si ottiene il quoto stesso aggiungendo alla rendita annua due zeri, dividendo poi il prodotto pel capitale.

Volendo la rendita di un mese non si ha che dividere quella di un anno per 12; e quella di un giorno dividendo quella di un mese per 30, o vero quella di un anno per 360 soltanto.

Se dato l' interesse per ogni 100 e l' annuo frutto, dopo un certo numero di anni, mesi, giorni, ec. si volesse sapere il capitale impiegato, si ragioni così: Se il frutto di duc. 5 in anni 1 proviene del capitale di ducati 100, il fruttato di duc. 762. 10. in anni 2, mesi 6, giorni 15 da qual capitale deve esser provenuto?

Si osservi che in questo il frutto cresce a proporzone che il capitale è maggiore, e perciò per questa parte è in ragione diretta; ma il tempo diminuisce, a proporzione che il capitale è maggiore, per ottenere un dato frutto, onde è che perciò il quesito è in ragione inversa, adunque

Frut :	Tempo.	Capt :	Frut.	Temp.
duc. 5.	an. 1.	duc. 108.	duc. 7. 62. 10.	an. 2. 6. 15.

Riducendo gli anni a giorni, e seguendo le regole date per

tali quesiti, si avrà per quoto duc. 6000, che denota il capitale, da cui è provenuto il sopra enunciato frutto.

Se dato il capitale, il frutto ottenuto, e l'interesse per 100 si volesse sapere il tempo, che il capitale è stato impiegato, si dovrà fare la seguente proporzione, riprendendo l'esempio suddetto, se duc. 5 fruttato di duc. 100 corrispondono ad anno 1; duc. 762, 10. frutto del capitale di duc. 6000 a quanti anni cosrisponderanno?

Frut.	Cap.	An.	Frut.	Cap.
duc. 5.	duc. 100.	1.	duc. 1762. 10.	duc. 6000.

Si osservi qui che se un maggior frutto richiede un maggior numero di anni, un maggior capitale per avere uno stesso frutto richiede un minor numero d'anni, e però il quesito appartiene alla proporzione inversa; ed eseguendo la regola, si otterrà per quoto an. 2. m. 6. gior. 15.

Con questa medesima proporzione dato il capitale, e 'l frutto per ogni 100, si troverà in quanto tempo un capitale sarà raddoppiato. Sia come sopra il capitale di duc. 600 al 5 per 100, si ragioni così: se ducati 5 si ritraggono da ducati 100 in anni 1, ducati 6000, in quanto si ritrarranno da duc. 6000?

Frut.	Cap.	An.	Frut.	Cap.
duc. 5.	duc. 100.	1.	duc.6000.	duc. 6000.

Ed ultimata l'operazione a norma della regola della proporzione inversa, si avrà per quoto, an. 20.

Senza brigarsi di far questa operazione, si otterrà il tempo, in cui raddoppiasi il capitale, dividendo 100 per l'interesse dato, così nel quesito sopra esposto, dividendo 100 per 5 si ottiene anni 20; se si dividerà per 4, si otterrà anni 25, ec.

Se l'interesse fosse soltanto a mese e giorni, o soli giorni, si scioglierà tali quesiti colle stesse regole, p. c. volendo sapere quanto darà di frutto in mesi tre e giorni 20 un capitale

di Tarì 90 a tre cavalli per ogni Tarì al mese, si farà la seguente proporzione.

Tarì.	Mesi.	Cavalli.	Tarì.	Mesi.	Giorni.
1.	2.	3.	90.	3.	20.

Ridotto il quesito a tre termini, e fatta l'operazione come prescrive la regola del tre diretta composta, si otterrà per risultato Tarì 4, grana 2. cavalli 6.

Quesito.

Se Tarì 1 dà di frutto cavalli 6 al mese, quanti Tarì si richiede per fruttare 1 cavallo al giorno?

Per ottener ciò si ragioni così: Se cavalli 6 in giorni 30 sono prodotti da Tarì 1; cavalli 1 in giorni 1 da quanti Tarì?

Fatta l'operazione a norma della regola del tre inversa composta si troverà richiedersi Tarì 5.

Dato pertanto l'interesse per ogni 100 all'anno, si ha subito quanti cavalli dia un tarì al mese, dividendo lo interesse per 5; così a ragione di tarì 5 per 100 all'anno ogni tarì dà un cavallo al mese; ed a ragione del 6 per 100 ogni tarì dà cavalli 1. $\frac{1}{5}$, ec. Di fatti se tarì 100 in un anno danno tarì 5, cioè grani 100, un tarì in un anno renderà un grano e per conseguenza un cavallo per ogni mese.

All'opposto dati i cavalli, che frutta ogni tarì al mese, si troverà quanti tarì all'anno si ricavi da tarì 100, multiplicando i detti cavalli per 5: così se il tarì rende 1 cavallo al mese, l'interesse sarà a ragione di tarì 5 per 100 all'anno, ec.

Del pari dati i cavalli, che rende il tarì per ogni mese, si troverà in quanti anni il capitale sarà raddoppiato. Poichè se il Tarì da' cavalli 1 al mese, pel già detto, l'interesse sarà a ragione di tarì 5 per 100 all'anno, ma siccome il capitale al 5 per 100 all'anno si duplica in anni 20, come si è dimostrato, così dividendo 20 per 1, il quoto sarà 20, tempo in cui verrà duplicato il capitale.

Se poi il tarì dasse cavalli 2 al mese, è chiaro che il capitale si duplicherebbe in anni 10, ec.

§. 287. Alla regola d' interesse appartiene la regola di dare una somma a multiplico, vale a dire quando si dà un capitale col patto che l' interesse di ciascun anno passi ad aumentare il capitale, o ciò che torna lo stesso passi in capitale. Dato adunque il capitale di duc. 300 al 4 per 100 per 3 anni colla condizione che i frutti passino annualmente in capitale, si dimanda che diverrà il capitale al termine degli anni 3?

Si operi come segue:

Duc. 300. . . .	Capitale.
12. . . .	frutto del primo anno.
312. . . .	Cap.le aumentato al termine del primo anno.
12. 48. . .	frutto del secondo anno.
324. 48. .	Capitale al termine del secondo anno.
12: 97. 92.	frutto del terzo anno.
3. 37. 45. 92.	Cap.le aumentato alla fine del terzo anno

Dunque il capitale dato a multiplico dopo anni 3 è aumentato di duc. 37. 45. 92, e così di qualunque capitale dato per qualunque tempo.

Regola d' interesse a scalare.

§. 288. Questa regola serve a determinare il lucro che una somma qualunque può fruttare in un certo tempo proporzionatamente ad un altra somma data per un tempo stabilito, il di cui interesse è cognito, come nel seguente

Quesito.

Tizio ha imprestato a Caio duc. 585 compresovi l' interesse

di un anno alla ragione di duc. 6 per 100; dopo 8 mesi Tizio ripete il capitale, si dimanda quanto Caio dovrà restituire, deducendo li 4 mesi dall' interesse pel denaro; che avrebbe dovuto rimanere ancora nelle sue mani. Poichè ogni 100 ducati fruttano 6 duc. d' interesse in un anno, egli è evidente che li 100 ducati comprendono il capitale e l' interesse relativamente ai 100; dunque facendo questa proporzione 106: 6:: 584. al quarto proporzionale, questo quarto termine indicherà l' interesse di un anno, che entra nella somma proposta di ducati 584. Or questa si trova essere di ducati 33. 5 7. $\frac{98}{106}$. E siccome l' interesse pe' 4 mesi è $\frac{4}{12}$ dell' interesse annuo, ossia $\frac{1}{3}$, perciò l' interesse pei 4 mesi sarà espresso dal terzo di duc. 33. 5. 7. $\frac{98}{106}$. Sottraendo pertanto il terzo di questo dalla somma totale, cioè duc. 11. 1. 10. circa, rimarranno duc. 572. 8. 2. da pagarsi dopo 8 mesi.

Se poi il capitale fosse stato richiesto dopo 5 o 6, o 7 mesi, l' interesse di questi sarebbe espresso da $\frac{5}{12}$, o $\frac{6}{12}$, o $\frac{7}{12}$ dell' interesse annuo. Si dovrebbe pertanto divider l' interesse ottenuto per tutto l' anno in dodici parti eguali, e prenderne poi o 5, o 6, o 7.

Quesito.

Sempronio ha dato a Silvio ducati 800 col patto che paghi il 6 per 100 all' anno, e colla condizione che debbe rendergli ducati 300 per ogni anno compreso l' interesse; si dimanda in quanti anni Silvio pagherà il suo debito?

Si trovi l' interesse di ducati 800. al 6 per 100, che saranno duc. 48, ed aggiunti alli 800 daranno ducati 848, che tanto è il debito di Silvio dopo il primo anno, ma esso paga ducati 300 l' anno; dunque tolti questi dal capitale e interesse 848, resterà debitore di soli ducati 548. Questi danno per

interesse di un anno duc. 32, e grana 88, che aggiunti alli duc. 548 formano ducati 580, e grana 88, che tanto risulta il debito di Silvio dopo il secondo anno, ma questi paga ducati 300, tolti questi dai ducati 580, 48, resta Silvio soltanto debitore di ducali 288 e grana 88. Questi per un anno danno d' interesse ducati 16. 85. $\frac{28}{100}$, che aggiunti alli ducati 280 e 88, formano duc. 297, 73. $\frac{28}{100}$, che tanto si trova il debito di Silvio dopo il terzo anno, ma egli paga duc. 300; dunque Sempronio alla fine del terzo anno oltre di essere stato rimborsato da Silvio degli duc. 800. più l' interesse, deve rendere a Silvio duc. 2. 26. $\frac{72}{100}$. E se l' ultima rata non pareggierà il debito, indicherà quanto si debba pagare per soldo.

Quesito.

Caio ha prestato a Sempronio la somma di Tarì 16000 al 4 per 100 all' anno col patto di dovergli pagare annualmente un' egual partita che nello spazio di anni 5 estingua il capitale, ed i frutti, si domanda qual sarà la partita, che deve pagare una coi frutti.

Si dica: se dopo un anno 100. danno 4, Tarì 16000. quanto?

Tarì 16000. . .	Capitale
640. . .	frutti dell' anno primo.
16640. . .	Capitale e frutti.
665. 12. .	frutti dell' anno secondo
17305. 12. . .	Capitale e frutti.
692. 4. 6. .	frutti dell' anno terzo.
17997. 16. 6. .	Capitale e frutti.
719. 18. 3. .	frutti dell' anno quarto.

18717.	14.	9.	Capitale e frutti.
748.	14.	2.	frutti dell' anno quinto
19466.	08.	11.	Capitale e frutti.
778.	13.	01.	frutti per un anno di più, che si prende per facilitare la soluzione del problema.

Ciò fatto si sottragga il capitale o sia Tarì 16000 dalla somma risultata dell'anno quinto, cioè da 19466. 08. 11. e si otterrà per resto Tarì 3466. 08. 11. Si dica poi se Tarì 3466. 08. 11. sono estinti da 778. 13. 01. frutti dell' anno di più presi per un compenso, Tarì 16000 da quanto? da Tarì 3594. 0. 4 quoto, partita da pagarsi annualmente coi frutti per l' estinzione del capitale di Tarì 16000, ed eccone la pruova.

Capitale Tarì	16000.		
Frutti del 1° anno	640.		
Capitale e frutti.	16640.		
Prima rata . . .	3594.	0.	4.
Resto di capitale .	13045.	19.	8.
Frutti del 2° anno	521.	16.	9.
Capitale e frutti . .	13567.	16.	5.
Seconda rata . .	3594.	0.	4.
Resto di capitale. .	9973.	16.	1.
Frutti del 3° anno.	398.	19.	0.
Capitale, e frutti.	10372.	15.	1.
Terza rata. . .	3594.	0.	4.
Resto di capitale .	6778.	14.	9.
Frutti del 4° anno.	271.	2.	11.
Capitale, e frutti. .	7049.	17.	8.
Quarta rata. . .	3594.	0.	4.

Resto di capitale .	3455. 17. 4
Frutti del 5° anno.	138. 3. 0
Capitale e frutti .	3594. 0. 4.
Quinta rata . . .	3594. 0. 4.
	===== ==

La quale estingue il capitale, ed i frutti di Tarì 16000 al 4 per 100 in anni 5.

Regola di sconto.

§. 289. Questa regola ha luogo allor quando uno, essendo creditore di una data somma da pagarsi dopo un dato tempo, per avere il pagamento anticipato, accorda al debitore la deduzione di un tanto per 100; questa deduzione però deve essere proporzionata al lucro, che il debitore ritrarrebbe tenendo impiegata al medesimo profitto la somma, che sborsa prima del tempo convenuto, p. e. suppongasi che Caio debba pagare a Silvio dopo un anno duc. 210, e che Silvio per avere il suo denaro all'istante gli accordi lo sconto del 5 per 100; è manifesto che Caio dovrà sborsare ducati 200, poichè impiegando questa somma pel medesimo tempo al 5 per 100 lucrerebbe in un anno ducati 10; tanto perciò si deve dedurre dalla somma e non più di cui era debitore.

Lo sconto pertanto è del tutto contrario al lucro; quando si guadagna il 10 per 100, si fa di 100, 110, e di 10. 11; per lo contrario collo sconto si fa di 110, 100, e di 11. 10.

Lo sconto dei pagamenti, e delle mercanzie date in credito dovrebbe prendersi oltre il 100 perchè la somma, dalla quale si vuol levare lo sconto si dovrebbe considerare come composta di un capitale, che si deve pagare dopo averne sottratto lo sconto, ed in questo caso si dirà, se 104 si riduce a 100 a quanto si ridurrà la somma tale?

Ma vi è ancora l'uso di prendere lo sconto entro il 100, ed in questo caso si dirà: Se 100 si riduce a 96 a quanto si

ridurrà la tal somma? benchè in questo modo si prenda l' interesse del capitale e l' interesse dell' interesse, essendo ciò a danno del creditore.

Quesito.

Tizio deve pagare a Sempronio una cambiale di Tarì 8000 fra il termine di anni $2, \frac{1}{2}$; ma estinguendola all'istante Sempronio gli rilascia lo sconto a ragione di un mezzo per 100 al mese, cioè 6 per 100 all'anno, si dimanda a quanto ascenderà ciò che deve pagare Tizio netto di sconto per saldo de' Tarì 8000?

Si cerchi l' importo di Tarì cento in anni $2 \frac{1}{2}$ al 6 per 100 e si troverà essere di Tarì 15, che uniti alli 100 faranno 115, indi si dica, se 115 restano 100, 8000 quanto? e si troverà essere Tarì $6956, \frac{60}{115}$ e tanti deve Tizio pagare a Sempronio per la cambiale compreso lo sconto.

Quesito.

Sempronio è debitore di Tizio di Tarì 4616. 11. 3. i quali deve pagare dopo anni 3 e mesi 9. Tizio per averne all' istante il pagamento gli accorda lo sconto di Tarì 4 e grana 10 per 100, si vuol sapere che somma Sempronio dovrà sborsare?

Si trovi il frutto, che ritrarrebbe da Tarì 100 in anni 3, e mesi 9 impiegati al suddetto interesse, il che si otterrà multiplicando anni 3 e mesi 9 per Tarì 4, e grana 10, che daranno Tarì 16. 13. 5; aggiunti questi a Tarì 100 si dica: se Tarì 116. 13. 5. scontando rimangono 100, Tarì 4616. 11. 3 a quanto rimarranno? dunque:

Tarì 116. 13. 5. Tarì 100. Tarì 4616. 11. 3.

Ridotto il primo e terzo termine a cavalli, si avrà.

28001 : Tarì 100. 1107975.

Indi multiplicato il secondo pel terzo termine, e fatta divisione, si otterrà per quoto Tarì 3956 con una frazione. A questo risultato aggiunto il frutto di Tarì 3956. a Tarì 4. 10. per 100 in anni 3 e mesi 9, ne risulterà il capitale, di cui Sempronio è debitore, il che ne sarà, come è chiaro, la pruova.

Quesito.

Anselmo presta a Paulo Tarì 800 senza interesse, a condizione però che glieli deve restituire in quattro anni a Tarì 200 per ciascun anno, e mancando ad uno de' pagamenti, debba correre su di quello l'interesse del 5 per 100. Passano gli anni 4 senza che Paulo faccia alcun de' pagamenti, si dimanda quanto dovrà Paulo alla fine del quarto anno tra capitale e interesse?

Si avverta che li Tarì 200 non pagati dopo il primo anno sono ritardati di anni 3, quelli dopo il secondo di anni 2, e quelli dopo il terzo di anni 1. Ciò messo è ovvia la risposta.

Regola per gli affitti dipendente da quella di sconto.

§. 290. Accade sovente di dare in affitto case, masserie, ed altro colla totale anticipazione del tempo fissato, rilasciando però un tanto per 100, come:

Quesito.

Caio affitta una masseria a Sempronio per quattro anni per Tarì 4000 all'anno, ed alla condizione che pagando le quattro annate anticipate, gli rilascia il quattro per cento, si dimanda: qual sarà la somma che estinguerà il richiesto da Caio, e che Sempronio deve sborsare?

Per ben procedere in simili quesiti, si cominci l'operazione col sottrarre lo sconto dell'ultima rata dalla rata medesima, al resto, che si ottiene, si aggiunga la penultima rata, e dalla totale somma si sottri lo sconto, e così di seguito sino alla

prima, perchè dando Sempronio li quattro affitti anticipati, si deve togliere dalla quarta rata lo sconto quattro volte, dalla terza tre, della seconda due, e dalla prima una volta.

Si trovi lo sconto della quarta rata, indi si faccia:

Tarì . . .	4000.	quarta rata.
	160.	sconto, che si sottra.
	3840.	resto della quarta rata
	4000.	terza rata.
	7840. 0.	Somma.
	313. 12.	Sconto, che si sottra.
	7526. 8.	Resto della terza rata.
	4000. 0.	Seconda rata.
	11526. 8.	Somma.
	461. 1.	Sconto, che si sottra.
	11065. 7.	Resto della seconda rata.
	4000.	Prima rata
	15065. 7.	Somma.
	502. 12.	Sconto che si sottra.
	14462. 15.	Resto di rate e somma da pagarsi da Sempronio anticipato a Caio.

Quattro rate importerebbero	Tarì	16000. 00.
Sempronio ne paga . . .		14462. 15
Resta	Tarì	1537. 5

importo dello sconto per l'anticipazione del pagamento, che aggiunti a ciò che paga Sempronio formano la totale somma.

§. 291. Quì cade in acconcio parlare delle vendite e comper de' fondi.

Quesito.

Una masseria rende di affitto annuo Tarì 13500, ma paga di pesi Tarì 2400 all'anno, e porta di annue spese per riparazioni, ec. Tarì 1300. Questo fondo si vuol vendere in modo di ricavarne il 4 per 100 all'anno, si dimanda a quanto si dovrà vendere?

Si sottragga primamente dell'annuo fitto di Tarì 13500 le spese di pesi, e riparazioni, che unite formano tarì 3700, e si otterrà il prodotto netto in Tarì 9800, indi si faccia $4 : 100 : : 9800 : x$, cioè Tarì 245000: prezzo a cui dovrà vendersi.

Quesito.

Una casa è costata Tarì 42000, e si deve ogni anno pagare per riparazioni, tasse, ec. la somma di Tarì 400, a quanto si dovrà affittare per ricavarne all'anno Tarì 4. 10. per 100?

Si trovi l'interesse del capitale 42, 000 a Tarì 4. 10. per 100, che sarà di Tarì 1890; a questa somma si aggiunga le spese annue di Tarì 400. L'affitto perciò dovrà essere di Tarì 2290.

Regola di società.

§. 292. Questa regola serve a dividere un numero in tante parti, proporzionali ed altrettanti numeri dati, affine di saper ripartire tra i socii l'utile, o la perdita risultanti dalle loro speculazioni commerciali a ragione del capitale, che ciascheduno vi ha posto.

Data adunque una società può accadere primamente che i soci vi abbiano posto somme diverse da tenere impiegate per lo stesso tempo. Secondamente eguali somme da tenersi impiegate per diversi tempi. In questi due casi la società dicesi

semplice, come si fa manifesto dai seguenti esempli:

Quesito 1.

Sempronio ha impiegato per un anno duc.	180.
Caio . . . . idem.	300.
Mario . . . . idem.	425.
duc.	905.

Il lucro di anno è stato di ducati 338 si dimanda qual sia la parte, che spetta a ciascheduno?

Si unisca tutti i capitali, come si è fatto, e si avrà per somma duc. 905.

Si formi poi tante regole di tre quanti sono i soci, di modo che il primo termine sia la somma di tutti i capitali; il secondo la somma che determina il guadagno totale, e per terzo il rispettivo capitale di ciascun socio; il quarto termine indicherà il guadagno, che spetta a colui, il cui capitale forma il terzo termine, e poi si dica; se duc. 905. hanno fruttato duc. 338, quanto avranno fruttato duc. 180 primo capitale, si troverà duc. 67. $\frac{205}{905}$; indi quanto avrà fruttato il secondo capitale di duc. 300 e si troverà duc. 112. $\frac{40}{905}$; e per ultimo quanto il terzo capitale di duc. 425, e si troverà duc. 158 $\frac{660}{905}$. La somma ottenuta del fruttato dei rispettivi capitali dovrà trovarsi eguale a duc. 338, come la è, giacchè raccolti i prodotti parziali come qui appresso si ha:

Duc.	67. 205.
	112. 40.
	158. 660.
	1.
Duc.	338. $\frac{905}{905}$ = 1.

Totale degli utili ripartiti corrispondente.

Quesito 2.

Tre persone hanno posto in un negozio ciascheduno la somma di duc. 500, ed hanno lucrato su l'intiero capitale duc. 1000. La prima persona ha tenuto impiegato il suo capitale mesi 3; la seconda mesi 7, e la terza mesi 12. Vuol sapersi qual parte del lucro spetti a ciascheduno?

In questo caso il lucro totale proviene da un capitale di duc. 500 impiegato per mesi 22, e per conseguenza il quesito appartiene alla regola di società semplice. Si dica dunque se mesi 22 hanno dato di lucro duc. 1000, mesi 3 quanto? e si troverà duc. 136. 8. Indi mesi 7, quanto? e si troverà duc. 318. 4. e per ultimo mesi 12 quanto? e si troverà duc. 545. 10., ed in questo modo sarà determinata la parte del lucro, che spetta a ciascheduno, quali parti raccolte;

Duc. 136. 8.
318. 4.
545. 10.
1.

Duc. 1000 $\frac{22}{22}$ = 1 formano l'intiero lucro.

Società composta.

§. 293. Se capitali diversi sono impiegati per tempi diversi la società si chiama composta. In tal caso si multiplichi ciascun capitale per quel tempo, che è stato impiegato, e si avrà tanti termini quanti capitali; quindi fatta somma de' prodotti si metta questa per primo termine, e si operi come la società fosse semplice:

Quesito.

Tre mercadanti hanno impiegato tre somme diverse per tempi diversi, vale a dire il primo ha impiegato duc. 114. per

anni 3 Il secondo duc. 248 per un anno, ed il terzo duc. 156. per 2 anni. Il lucro è stato di duc. 325, si dimanda quanto spetta a ciasceduno?

Si effettui le multipliche de' capitali pei tempi diversi, come si è detto, e di queste se ne faccia somma, essa si troverà di duc. 902; si faccia poi 902: 325 : : 342 primo capitale multiplicato per 3 al quarto termine, che sarà 123. 22. Indi 902: 325 :: 248 secondo capitale multiplicato per uno al quarto termine, che si troverà essere di duc. 89. 35. E finalmente 902 : 325 : : 312 terzo capitale multiplicato per 2 al quarto termine espresso da duc. 112. 41. e si sarà ottenuta la parte di ciascheduno avendo trascurato i centesimi.

§. 294. Se il tempo fosse espresso da anni e mesi, ec. si ridurrà gli anni ed i mesi a mesi, e si multiplicherà poi i capitali pel numero de' mesi.

§. 295. Alle volte può accadere che durante il tempo della società i capitali o crescano, o diminuiscano, come nel seguente

Quesito.

Tre negozianti hanno fatta società, il primo vi ha posto duc. 600, e dopo 6 mesi ne ha posti altri 100. Il secondo ne ha impiegati 1000, e dopo 8 mesi ha tolto dal suo capitale duc. 200. Il terzo ha impiegato duc. 1200, e li ha lasciati dal principio fino al termine della società, che ha continuato per 2 anni. Il guadagno è stato di duc. 490. Si dimanda quanto spetti a ciascheduno?

Il primo capitale per mesi 6 fu di duc. 600, che multiplicati per 6 = 3600, e per 18 mesi fu di duc. 700, che multiplicati per 18, = 12600 dunque per 2 anni fu di ducati 16200.

Il capitale del secondo per mesi 8 fu di duc. 1000, che multiplicati per 8 = 8000; ma egli tolse del suo capitale duc. 200; dunque per 16 mesi fu di duc. 1000 meno 200 = 800 che multiplicati per 16 danno ducati 12800, questi uniti alli 8000 formano pel capitale de' due anni duc. 20800.

E finalmente il terzo, che ha impiegato il suo capitale per due anni ossia 24 mesi, sarà 24 $\times$ 1200 = 28800.

Or si raccolgano tutti i capitali multiplicati pe' loro tempi e se ne faccia somma, dipoi si dica: se 65800 somma di questi ha fruttato 490, quanto 16200? quanto 20800? e quanto 28800? e si sarà ottenute le parti seguenti.

parte del primo . . . duc.	120. 63.	$\frac{54600.}{65800.}$
parte del secondo . . duc.	154. 89.	$\frac{23800.}{65800.}$
parte del terzo . . . duc.	214. 46.	$\frac{53200.}{65800.}$
importo delle frazioni . . .	2.	
duc.	490. 00.	

Società Maritima.

Quesito.

§. 296. Una società spedisce un carico di ducati 100000 di diversi generi; questo carico durante il viaggio ha di perdita per getto di merci in mare, spese di accomodi del bastimento, danni ec. duc. 54000; si dimanda quanto vi ha di perdita per 100.

Si dica: se ducati 100000 perdono 54000, 100 quanto? e fatta l'operazione, si troverà esser la perdita di ducati 54 per 100.

Supponendo poi che uno della società vi avesse duc. 40000, si dimanda quanto perde di sua parte?

Si dica: se' 100000 perdono 54000, 40000 che? 21600. E così si parte tutta la perdita in proporzione del capitale di ciascuno.

Società rurale.

§. Tre mercadanti di bestiame fatta società si sono obbligati pagare per una prateria Tarì 16800, e sono tra essi convenuti di tassarsi di Tarì 6 per ogni vacca; Tarì 4 per ogni montone, e Tarì 2 per ogni pecora o capra, si dimanda qual sia la somma da pagarsi da ciascuno, avendo il primo:

1.		2.		3.	
Vacche	400.	Vacche	500.	Vacche	800.
per Tarì	6.	per Tarì	6.	per Tarì	6.
Montoni	100.	Montoni	300.	Montoni	400.
per Tarì	4.	per Tarì	4.	per Tarì	4.
Pecore	700.	Pecore	900.	Pecore	2000.
per Tarì	2.	per Tarì	2.	per Tarì	2.
Composto del primo Tarì	1212.	Del secondo Tarì	1712.	Del terzo Tarì	3212.

Composto totale Tarì 6136. Or si dica:
Se il composto di 6136. paga 16800., il composto del primo di Tarì 1212. quanto? . . . . . . Tarì 3318. 7. 7.

Se il composto di 6136. paga 16800.
il composto del secondo 1712 quanto? . . . 4687. 7. 2.
Se il composto di 6136. paga 16800.
il composto del terzo 3212. quanto? . . . 8794. 5. 3.

Tarì 16800. 0. 0.

Quesito.

Un proprietario dà ad un pastore pecore 96 per anni 5 a condizione che dopo questo termine si abbia a dividere per metà il total numero delle pecore, che si troveranno. Dopo anni 3. mesi 1. $\frac{1}{2}$ si scioglie la società e si trova in tutte pecore 176. Si domanda quante pecore spettano al proprietario, e quante al pastore?

Dalle pecore 176 tolto il capitale pecore 96 restano di guadagno pecore 80. Di questo lucro il pastore ne deve avere la metà secondo la convenzione, cioè pecore 40, benchè il tempo non sia finito.

In quanto al capitale, che era pecore 96, il pastore non può pretenderne la metà, cioè 48; ma soltanto la porzione corrispondente al tempo di anni 3. 1. $\frac{1}{2}$.

Si dica adunque: se per anni 5 ne doveva aver 48; per anni 3. 1. $\frac{1}{2}$ quante ne dovrà avere? ed il quarto termine si troverà 30; perciò dovrà avere il pastore pecore 40, più 30, cioè 70, ed al proprietario pecore 106.

Società d' imprese e di appalti.

§. 298. Allor quando si forma una società o per fare un opera, o per prendere un appalto, affine di facilitare il conteggio, si suol dividere la società in un determinato numero di parti, chiamate comunemente *soldi*, ed in proporzione de' soldi che ciascuno prende, si riparte sì la spesa che il guadagno. La regola da tenersi la presenta il seguente

Quesito.

Sei persone prendono un appalto in società, (Pel facile conteggio si rapporta i *soldi* a grani.) *A* v' entra per grana 6, cavalli 8. *B* per grana 5. *C* per grana 3. 9. *D.* per grana 2. 6. *E* per grana 1. 8. *F* per grana — 5. che in tutto fanno grana 20 o un Tarì. La spesa in comune ammonta a Tarì 200000 ed il prodotto a Tarì 300000. Si dimanda quanto spetti a ciascuno della spesa, e del prodotto, e quanto vi abbia di guadagno?

Per trovare quanto spetti a ciascuno di sua parte per la spesa, si dica:

Se a Tarì 1 spettano Tarì 200000: alle parti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* quanto? e fatte le debite operazioni si otterrà la parte di ciascheduno.

Per trovare quanto tocchi a ciascuno del prodotto si dica;

se a Tarì 1 toccano Tarì 300000, alle parti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* quanto? e risulteranno le parti rispettive del lucro.

E finalmente per trovare il guadagno si sottragga dal prodotto di ciascuno la spesa; e si otterrà le parti rispettive del lucro.

Società di concorso ne' fallimenti.

§. 299. Siccome ne' fallimenti concorrono i creditori, ciascuno per la somma, che gli è dovuta, così la distribuzione da farsi della rimasta sostanza fra i creditori, quali formano una società, può sempre trovarsi colle diverse regole di proporzione, come nelle società di negozio, il che vedesi nel seguente.

Quesito.

Un mercante fallisce lasciando fra generi, e crediti ducati 6000, ma deve ad *A* duc. 2300, a *B* ducati 5700, ed a *C* ducati 4000. Si dimanda quanto toccherà a ciascuno in proporzione del suo credito?

Essendo la somma dovuta ai creditori duc. 12000, e quella da dividersi duc. 6000, si dica: se al credito di ducati 12000 tocca duc. 6000, quanto toccherà al credito di *A*, di *B*, di *C*.? Le parti che risulteranno fatta l' operazione formeranno appunto la somma di duc. 6000.

Quesito.

Un altro negoziante fallisce lasciando fra tutto duc. 146950, e di debito, compresi i creditori per istromento, che ascende la loro somma a duc. 44000, duc. 186000, si dimanda quanto tocchi per 100 ai creditori senza istromento?

Dal debito totale si tolga la somma de' creditori con istromento, e rimarranno duc. 142000 Dalla somma lasciata dal fallente tolta la somma da pagarsi ai creditori istromentati restano duc. 102950. Ciò messo si dica: se a duc. 142000 toccano duc. 102950, a duc. 100 quanto toccherà; il quarto termine di duc. 72, e qualche grano indicherà la parte, che spetta per ogni 100 ai creditori senza istromento.

Società di eredità

§. 300. Se più persone sono chiamate eredi da un testatore, tolti i legati, ed altro, ec. tutto il resto si divide fra gli eredi o in parti eguali, o secondo la proporzione fissata dal testatore. I quesiti di tal sorta si tratterà parlando del falso doppio.

Società di locazioni.

§. 301. Allor quando più persone prendono in affitto per lo stesso tempo, e in egual porzione un palazzo, una masseria, ec. per sapere quanto abbia da pagare ciascuno, altro non si ha da fare che una semplice divisione secondo il numero delle persone.

Se la locazione è fatta per lo stesso tempo, ma in porzione diversa, il riparto delle spese, e dei frutti si deve fare secondo la rata, che ciascuno ha posto.

E se la rata è eguale, ma il tempo diverso, allora si deve operare come nel seguente

Quesito.

A prende una casa a pigione per ducati 360, dopo mesi $3\frac{1}{2}$ riceve un compagno *B* col patto che egli paghi la sua parte a rata del tempo; dopo altri mesi $4\frac{1}{2}$ accetta un altro socio *C* colla medesima condizione; si dimanda quanto dovrà pagare ciascuno alla fine dell' anno?

È chiaro che *A* debba pagare l' intera rata de' primi mesi $3\frac{1}{2}$, più la metà degli altri $4\frac{1}{2}$ avendo accettato un socio, più il terzo degli ultimi 4 mesi, che rimangono, avendo per questo tempo due soci; *B* poi deve la metà della seconda rata, ed il terzo dell' ultima, e *C* soltanto il terzo dell' ultima rata. Or si dica: se per mesi 12 si paga duc. 360, quanto si pagherà per mesi $3\frac{1}{2}$; quanto per mesi $4\frac{1}{2}$; e quanto per mesi 4?

Trovate le tre rate, alla prima si aggiunga la metà della seconda, ed il terzo della terza, e ciò sarà la parte di A; alla metà della seconda rata si aggiunga il terzo della terza e formerà la parte di B; ed il terzo della terza rata sarà ciò che spetta a C.

Dei riparti.

§. 302. Ogni qualvolta fra più corpi di società, o fra più persone particolari abbiasi a dividere una spesa comune, secondo diverse proporzioni, ciò si appella *conto di riparto. Il conto di riparto* serve ancora per fissare la distribuzione de' pubblici carichi in quella proporzione però, che stabilisce il *Governo*, giacchè alle volte s'impone a ragione delle famiglie, o a ragione degli individui, o a ragione del sale, che si consuma, o a ragione della fondiaria, che si paga.

Regola di miscuglio.

§. 303. In due casi si adopera questa regola; primo quando di varie sorte dello stesso genere, acquistate a prezzi diversi, si fa un misto, e si cerca il costo di ciò che ne risulta da tale mescolanza; secondo quando è cognito il valore delle parti componenti, ma ignorasi il numero, che si deve prendere di queste parti per formare il misto, di cui è fissato il valore.

Quesito 1.

Un tomolo di grano è costato carlini 20.
Un altro . . . . 21.
Un altro . . . . 25.
Un altro . . . . 28.

Somma carlini . . 94

Si dimanda quanto costerà un tomolo di questo miscuglio, composto di quattro qualità di grano comprato a prezzi diversi?

Si raccolga i quattro prezzi, e si avrà per somma carlini 94 indi si dica:

Se tomola 4 valgono carlini 94, uno quanto? si risponde carlini 23. 5.

E così si otterrà il prezzo di qualsisiasi miscuglio.

E volendo lucrare il 5 per 100 nel venderlo si faccia la seguente proporzione, 100 : 5 :: 23. 5; al quarto, e si otterrà carlini 1. grana 1 e cavalli 8, il che aggiunto al prezzo del grano trovato, si avrà carlini 24. 6. 8, che tanto si dovrà vendere ciascun tomolo di grano. E così si potrà operare per qualunque altro genere volendo lucrare il 3, il 5, il 7, il 10 per 100.

Questa regola serve a ben procedere in quella operazione, che si chiama *liquidazione*, con cui si determina il valor giuridico di tutti i generi, prendendone il prezzo medio di un determinato tempo.

Quesito 2.

Un mercante vorrebbe mescolare del grano, che gli costa duc. 10 la soma con altro, che gli costa solamente duc. 6. per formare un misto da vendersi duc. 12 la soma:

Prezzo stabilito duc. 12	10.	differenze	6. × 10 = 60
	6.		2. × 6 = 12
			somma 72

divisa per 6 = 12

Si collochi i prezzi, come si vede, indi si metta la differenza del più piccolo dal prezzo stabilito *sopra*, e la differenza del più grande dal prezzo stabilito *sotto*; queste due differenze indicheranno quanto si debba prendere sì dell' uno che dell' altro, risultando da questo esempio che si dovrebbe prendere 6 some di grano da duc. 10, e 2 di quello da duc. 6, per formare un misto di some 6 da vendersi duc. 12., come vedesi nell' esemplo.

§. 304. È necessario saper ancora conteggiare tanto il gua-

dagno che la perdita, che si potesse esser fatta o nella compra, o nella vendita di un qualsisia genere. Il guadagno o la perdita sopra una merce comprata ad un certo prezzo, e venduta ad un altro, si ottiene con confrontare la spesa fatta col ricavato, o vero col sottrarre l'una dall'altro; ma quando si vuol sapere ciò che si guadagna o si perde per 100 è necessaria una regola di proporzione, come si vede dagli esempi:

Quesito 1.

Caio ha comprato libbre 2730 di cotone a Tarì 60 il cento, e lo ha rivenduto Tarì 72 il cento, si dimanda quanto guadagna per ogni 100 Tarì?

Si dica: se Tarì 72 meno 60 danno Tarì 12 di guadagno, cento Tarì quanto?

$60 : 12 :: 100 : x = 20$ quoto, perciò Caio nel rivendere il cotone guadagna il 20 per ogni 100 Tarì.

Quesito 2.

Tizio compra 69. botti di caffè per Tarì 10000, e le rivende per Tarì 8500, si dimanda qual sia la perdita per ogni 100 Tarì?

Tarì 10000 importo della compra,

8500 è stata la vendita.

1500 differenza in perdita

Or si dica: se 10000 perdono 1500, 100 quanto? si risponde Tarì 15, perciò Tizio perde Tarì 15 per ogni 100.

Regola di baratto

§. 305. Questa regola serve nel negoziato a saper cambiare merci con merci, delle quali è determinato il prezzo.

Quesito

Alessandro ha 10 cantara di zucchero, che vale duc. 60 il

cantaro, e vuole barattare con Lucio, il quale tiene del caffè, il cui valore è di 120 duc. il cantaro; quanto caffè dovrà avere?

Si valuti le 10 cantara di zucchero facendo 10 >< 60 = 600, indi si dica: se con duc. 120 si ha un cantaro di caffè, quante cantara se ne avrà con duc. 600? sarà pertanto 120: 1 : : 600 al quarto, che si troverà essere cantara 5.

Quesito

Sempronio ha della mossolina, che a contanti ne vuole duc. 5. la pezza, ed in baratto duc. 6. Augusto ha del panno, che a contanti ne vuole duc. 7 la canna; si dimanda a qual prezzo debba conteggiarlo in baratto per non discapitarvi?

Se 5 in baratto val 6, 7 quanto? si risponde duc. 8. 40.

Se poi nel venderlo volesse farvi il guadagno del 5 per 100, si farà:

Se 100: 105. 8, 40 quanto? si troverà duc. 8. 82.

Regola di alligazione

§. 306. Quando di più generi di valore diverso se ne fa un misto fondendoli, e si vuol sapere quanto riverrà ciò che risulta da tale mescolanza; oppure si vuole che questo misto costi una somma determinata; il metodo che si tiene per giungervi, si chiama regola di *alligazione*, la quale può esser diretta o inversa.

Quesito di alligazione diretta.

Caio ha comprato libbre 15 di oro, e libbre 18 di argento; l'oro l'ha pagato duc. 116 la libbra, e l'argento duc. 14 la libbra; si dimanda qual sarà il prezzo di questi due generi fusi?

Si trovi il prezzo dell' oro, che sarà duc. 1740; indi quello dell' argento, che sarà di duc. 252; si unisca questi due valori, i quali formeranno duc. 1992, e si dica: se libbre 33 fra oro e argento hanno costato duc. 1992, una quanto?

e si troverà essere duc. 60. 36. $\frac{12}{33}$ il costo di una libbra.

Quesito di alligazione inversa.

Si vuol formare una moneta di oro, e di lega, che costi duc. 95: l'oro vale duc. 93 la libbra, la lega vale duc. 77. la libbra; si dimanda quanto ci andrà dell' uno, e quanto dell' altra?

$$\text{Duc. } 95. \left|\begin{matrix} 93 & \text{dif. } 18 \\ 77 & \text{dif. } 2 \end{matrix}\right. \qquad \frac{18}{20} \text{ e } \frac{2}{20} \text{ o } \frac{9}{10} \text{ e } \frac{1}{10}$$

20 Somma

Si trovi la differenza tra 95 e 77; che è 18, e si ponga sopra, e tra 95 e 93, che è 2, e si ponga sotto; si addizioni queste due differenze, e della somma se ne faccia il denominatore di due frazioni composte delle due differenze, e si avrà $\frac{18}{20}$, e $\frac{2}{20}$, o $\frac{9}{10}$, e $\frac{1}{10}$; perciò per fare la suddetta medaglia vi vorrà $\frac{9}{10}$ di oro, e $\frac{1}{10}$ di lega.

Volendo la pruova di questa operazione si istituisca le seguenti regole:

$$\text{Se } 1 : 95 :: \frac{9}{10} : x, \text{ e sarà } 95 \times \frac{9}{10} = \frac{855}{10} : \frac{1}{1} = 85.\frac{5}{10}$$

$$\text{Se } 1 ; 95 :: \frac{1}{10} : x, \text{ e sarà } 95 \times \frac{1}{10} = \frac{95}{10} : \frac{1}{1} = 9\ \frac{5}{10}$$

$$95.\ 0$$

Regola del falso supposto semplice

§. 307. Questa regola consiste nel determinare un numero di cui si va in cerca per la soluzione di un qualunque quesito per mezzo di una falsa supposizione, la quale benchè

non lo sciolga immediatamente, conduce però a conoscere perfettamente la verità, il che fassi manifesto per lo seguente

Quesito.

Si deve dividere duc. 658 fra tre persone, in modo che la seconda abbia tre volte altrettanto della prima, e la terza quanto le altre due prese insieme.

Supposto che la parte della prima sia un ducato, quella della seconda sarà di tre, e quella della terza sarà di quattro. La totalità di queste tre parti è di duc. 8, quindi la supposizione, che si è fatta è erronea, poichè non dà che duc. 8, mentre la totalità delle parti deve trovarsi di duc. 658. ma egli è evidente che le parti supposte sono proporzionali alle parti vere, e che per conseguenza la totalità delle parti supposte sta a ciascheduna di queste, come la totalità delle parti vere sta a ciascheduna delle parti vere; perciò si potranno ottenere le parti vere con le tre seguenti proporzioni:

8 : 1 :: 658 : alla prima parte vera, che è di duc. 82. 25.
8 : 3 :: 658 : alla seconda parte vera, che è duc. 246. 75.
8 : 4 :: 658 : alla terza parte vera, che è duc. 329. 00.

quali somme formano duc. . . . . . . 658. 00.

Quesito

Pietro ha lasciato in legato Tarì 85161 da dividersi in questo modo; $\frac{1}{3}$ al primo figlio, $\frac{1}{5}$ al secondo, $\frac{1}{6}$ al terzo, ed $\frac{1}{12}$ ai poveri, si dimanda sapere la parte rispettiva?

Si faccia supposizione che il legato fosse Tarì 8000 e da questo si ritragga proporzionatamente le parti espresse nel quesito. Indi si passi a fare una regola di tre semplice, mettendo per primo termine la somma delle parti ottenute dal falso supposto; per secondo il supposto stesso, e per terzo la somma del legato. Ottenuto il quoto secondo le regole, si fac-

cia di nuovo su questo la medesima operazione, e si ricavi le parti rispettive, come si è fatto su il numero supposto, ed addizionate insieme devono trovarsi eguali alla somma del legato.

Soluzione del quesito.

Tarì . . 8000. supposto

$\frac{1}{3}$ Tarì	2666.	13. 4.	parti del supposto
$\frac{1}{5}$ . .	1600.	0. 0.	
$\frac{1}{6}$ . .	1333.	6. 8.	
$\frac{1}{12}$ . .	666.	13. 4.	

6266. 13. 4. Somma del supposto.

Regola di tre semplice.

Se Tarì 6266. 13 . 4 derivano da 8000. falso supposto, da Tarì 85161. che deriverà? Tarì 108716. 3. 4.

pruova.

Tarì . . 108716. 3. 4.

36238. 14. 5.	$\frac{1}{2}$	terzo del primo figlio.
21743. 4. 8.	$\frac{1}{2}$	quinto del secondo.
18119. 7. 2.	$\frac{1}{2}$	sesto del terzo.
9059. 13. 7.	$\frac{1}{2}$	duodecimo a' poveri.

Somma 85161.

Regola del falso supposto doppio.

§. 308. Alle volte non serve fare una sola falsa supposizione per avere il numero, che si cerca per la soluzione del quesito, ma si richiede far due falsi supposti uno differente dall' altro, come nel seguente

Quesito

Tizio ha tre figli, l' età del secondo supera quella del primo di anni 5, e quella del terzo supera quella del secondo di anni 10: raccolti gli anni di questi figli sono 47.; si dimanda quanti saranno gli anni di ciascheduno?

Si faccia supposizione che il primo figlio abbia anni 4, il secondo ne avrà 9, e 'l terzo 19, quali fanno anni 32, dunque la supposizione ha prodotto errore poichè doveva dare anni 47, ed ha dato anni 32; questo errore di 15 anni si chiama errore *in meno*. Si faccia un' altra supposizione, e si dica: abbia il primo figlio anni 7, il secondo ne avrà 12, ed il terzo 22, che raccolti formano anni 41, dunque anche la seconda supposizione ha prodotto un errore in meno di 6. dovendo dare anni 47. Ciò messo si otterrà il vero numero operando così: si multiplichi la prima supposizione pel secondo errore, e la seconda supposizione pel primo errore, e trovata la differenza di questi due prodotti, si divida per la differenza de' due errori, il quoto darà il numero cercato. La prima supposizione nell' addotto esempio fu di 4 e il secondo errore fu di 6,, perciò si farà $4 \times 6 = 24$. La seconda supposizione fu di 7; ed il primo errore fu di 15; dunque si faccia $15 \times 7 = 105$. Or la differenza de' due prodotti è $105 - 24 = 81$. La differenza de' due errori è $15 - 6 = 9$, e per conseguenza il vero numero è $\frac{81}{9} = 9$, che tanti saranno gli anni del primo figlio: quelli del secondo dovranno essere $9 + 5 = 14$, e quelli del terzo $14 + 10 = 24$, che in tutto formano anni 47.

Se poi le due supposizioni producessero due numeri maggiori del 47, in tal caso gli errori saranno in più, ma si opera come se gli errori fossero in meno.

È finalmente se le due supposizioni producessero due errori uno in *più* ed uno in *meno*, allora si divida la somma de' due prodotti per la somma de' due errori, il quoto sarà il numero cercato.

Supponendo di nuovo che l' età del primo figlio fosse di anni 8, quella del secondo dovrà essere di anni 13, e quella del terzo di anni 23, che uniti fanno anni 44, con 3 di errore in meno. Si supponga ora che l' età del primo sia di anni 18, quella del secondo sarà di anni 23, e quella del terzo di anni 33, quali addizzionati formano anni 74 con 27 di errore in più. Si multiplichi dunque la prima supposizione pel secondo errore, cioè $8 \times 27 = 216$, indi la seconda supposizione pel primo errore, cioè $3 \times 18 = 54$ e la somma 270 di questi due prodotti divisa per 30 somma degli errori da' 9 egualmente età del primo figlio come sopra.

Quesito.

Tizio ha giocato il bigliardo con Sempronio a questa condizione, che gli pagherebbe per ogni partita, che perdesse carlini 12, e Sempronio carlini 8 dopo 10 partite Tizio guadagna carlini 20; si dimanda quante partite avrà vinte si supponga da primo che sieno 5 le vinte, dunque ne ha perse altre 5 per formare il numero di 10. Per le vinte Tizio ha prese $5 \times 8 = 40$, e per le perdute ha dato $5 \times 12 = 60$. Dunque in questa supposizione Tizio è perditore di carlini 20 per le partite perdute, egli è poi vincitore di carlini 20, perciò l'errore è di 40 in meno, giacchè 20 ne perde, e 20 ne dovrebbe avere per le vinte. Abbia vinto partite 6, e perdute 4, per le vinte ha preso $6 \times 8 = 48$, e per le perdute ha dato $4 \times 12 = 48$, nella quale supposizione egli non ha nè vinto nè perduto; ma egli è vincitore di carlini 20, dunque l' errore è di 20 in meno. Si faccia la multiplica della prima supposizione pel secondo errore; e della seconda supposizione pel primo errore e trovata la differenza 140 de' due prodotti si divida per la differenza 20 de' due errori, questa darà 7; dunque Tizio ha vinto partite 7, e ne ha perdute 3.

pruova.

Tizio ha vinto partite	7.	carlini 56.	
ne ha perdute	3.	carlini 36.	
	partite 10.		20. resta vincitore.

Quesito.

Caio ha impiegato in varii negozii un capitale, nel primo de' quali ha perduto $\frac{1}{6}$; nel secondo ha guadagnato $\frac{1}{5}$; nel terzo ha perduto $\frac{1}{8}$; e nell' ultimo ha guadagnato $\frac{1}{9}$. Alla fine si è trovato avere in cassa Tarì 8000.

Si dimanda qual fosse il capitale impiegato?

Si faccia supposizione che il capitale impiegato fosse di Tarì 15000, da questo si deduca il $\frac{1}{6}$; al resto si aggiunga il $\frac{1}{5}$ guadagnato, dalla somma si tolga l' ottavo perduto, ed al resto si aggiunga il $\frac{1}{9}$ guadagnato.

La somma di Tarì . .	14583. 6. 8.
Ma in cassa vi erano .	8000. 0. 0.
Errore in più . .	6583. 6. 8.

Si faccia la seconda supposizione che il capitale impiegato fosse di . . . . Tarì 8200.
da questo si deduca il $\frac{1}{6}$; al resto si aggiunga il $\frac{1}{5}$ guadagnato, dalla somma si tolga l' $\frac{1}{8}$ perduto; ed al resto si aggiunga il $\frac{1}{9}$,

La somma sarà di Tarì . .	7972. 4. 5.
Ma in cassa vi erano . Tarì	8000. 0. 0.
Errore in meno . . .	27. 15.7.

Fatto ciò che è prescritto quando gli errori sono uno in più ed uno in meno si troverà essere il vero capitale impiegato, che si cerca, di Tarì 8228. 11. 5. Per farne la pruova, dal capitale vero trovato si tolga il $\frac{1}{6}$ perduto; al resto si aggiunga il $\frac{1}{5}$ guadagnato; dalla somma si tolga l' $\frac{1}{8}$ perduto; ed al resto si aggiunga il $\frac{1}{9}$ guadagnato, la somma si troverà di Tarì 8000, ma in cassa vi erano Tarì 8000, dunque ec.

§. 309. Discorse le regole del falso semplice, e doppio poste quì per condurre gli studenti quasi per mano alla soluzione de' problemi più ardui, si mostri loro come con una semplice proporzione si adempia alla regola di falso più a portata de' giovani, ed ecco gli esempi:

Quesito.

Ad un negoziante fu dimandato un dì quanto avesse guadagnato nel suo negoziato di grano, rispose egli, io ho tanto guadagnato, che la metà, il terzo, il quarto di più di ciò che ho, formerebbero duc. 250

In questi quesiti, fatta una sola supposizione, e trovate di questa le parti a seconda del quesito; si metta per primo termine la somma di queste parti, per secondo termine la somma data, e per terzo termine il numero del supposto.

Supposto	12.
la metà . . .	6.
il terzo . . .	4.
il quarto . . .	3.
somma	25

Dunque $25 : 250 :: 12 : x = 120$.

prova . . .	120
$\frac{1}{2}$	60
$\frac{1}{3}$	40
$\frac{1}{4}$	30
Totale	250 perciò ne aveva 120

Quesito.

Un giorno fu dimandato ad un artiere quanto danaro avesse guadagnato nella settimana, egli rispose, io ho guadagnato tanto che un $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ insieme del mio guadagno formano duc. 36.

dato 36, supposto 24

$\frac{1}{3}$	8
$\frac{1}{4}$	6
$\frac{1}{6}$	4
	18 somma delle parti supposte

dunque $18 : 36 :: 24 : x = 48$.

pruova	48
il $\frac{1}{3}$	16
$\frac{1}{4}$	12
$\frac{1}{6}$	8
	36

Cambio

§. 310. *Banchiere*, si chiama un negoziante il cui principale commercio è di dare e di ricevere delle cambiali sopra le città di paesi diversi.

§. 311. *Cambiale o lettera di cambio* è un ordine o un mandato di pagamento che fa un *banchiere* ad un altro, o ad un negoziante d'un luogo qualunque, o ad un debitore, o ad un corrispondente, col quale ordine li previene di corrispondere a colui, che ne sarà il latore, il denaro, che egli ha ricevuto nel luogo di sua dimora.

§. 312. *Biglietto di cambio* è un obbligazione di pagare una somma ad un tempo determinato, e ciò pel valore ricevuto in una cambiale fatta, o da farsi, o per causa di mercanzie vendute da pagarne il valore in un tempo qualunque.

§. 313. Per cambio delle monete estere s' intende la maniera di calcolare una quantità di monete di un paese qualunque per averne un egual valore in monete di un altro paese, qual calcolo però far deesi secondo un rapporto stabilito tra i due paesi, che vogliono fare queste valutazioni. Il modo, che si adopera per far questo cambio consiste in ciò che una delle due piazze dia il *certo*, cioè una specie di moneta fissa, e l'altra l'*incerto* o una quantità variabile di monete, che dassi in cambio della moneta fissa.

§. 314. Il *Cambio* è un commercio di danaro, col quale si dà in un luogo una certa somma per rimetterla, o riceverla in un altro. Fare il cambio di una piazza coll' altra vuol dire convertire la moneta di un paese in quella di un' altro, o sia permutare dall' una all' altra piazza una somma risultante da crediti, o debiti reciproci fra di esse per mezzo di *cambiali*. Queste cambiali o lettere di cambio consistono in *tratte*, e *rimesse*.

Allorquando un *Negoziante* o qualsisiasi persona ordina ad un suo corrispondente di pagare nella piazza istessa di questi una data somma; si domanda *far tratta*, e viceversa quando manda una cambiale da incassare o ricavare per suo conto dicesi *far rimessa*.

Per essere nel caso di fare il cambio di una piazza coll' altra, fa d' uopo conoscere le monete, che corrono nell' una e nell' altra piazza cambiante.

Delle due piazze, che cambiano una suol dare il *fisso*, e l'altra il *variabile*, e per intendere i *listini* de' cambi, si deve sapere quale delle due piazze dia il fisso, e quale il variabile, giacchè nel listino, che indica il corso o sia il prezzo del giorno, si nota soltanto un numero ed è il *variabile*, e leggendo questo si deve subito sapere se tale variabile sia p. e. di *Napoli*, di *Genova* ec. o pure della data piazza, con cui esse corrispondono. Per esempio, nel listino di Genova dirimpetto a *Livorno* trovo 127 $\frac{1}{2}$. Genova cambiando con Livorno dà il variabile, che sono i medesimi soldi 127 $\frac{1}{2}$ e Livorno dà il fisso, che è *Pezzo* 1. da reali 8. Da ciò si scorge che in Genova un *Pezzo* di *Livorno* vale 127 $\frac{1}{2}$, e che quando si dice: alla piazza si sono fatti de' cambi per Livorno, altro non vuolsi esprimere, che in Genova si è negoziata la moneta di *Livorno*.

Ecco un esempio teorico pratico per dare al principiante un idea più chiara del *cambio*.

È da sapersi prima che il cambio si calcola come gl' interessi a tanto per 100; esso varia a misura che vi sono più o meno cambiali.

Supposto che Tizio Genovese abbia un debito in Napoli di duc. 1000, e che Sempronio abbia un credito di eguale somma, Tizio va alla borsa, *luogo ove si riuniscono i negozianti*, e cerca per mezzo del mediator-cambista chi gli possa vendere de' ducati da esigersi in Napoli.

Sempronio è quello, che si offre di fargli tal vendita; si contratta il prezzo a norma del corso corrente della banca, ed in questo caso che Sempronio è creditore in Napoli, dà a Tizio una lettera di cambio diretta al suo debitore in Napoli, in cui gli ordina di pagare *all' ordine di Tizio*, il dato numero dei ducati. Tizio manda questa lettera al suo creditore in Napoli, perchè vada a riscuotere la data somma del debitore di Sempronio, e ne paga subitamente l' importo, ricevuto il ricapito. Il numero dei soldi, che fra di loro hanno fissato Tizio e Sempronio per prezzo del ducato Napolitano, si chiama il cambio corrente di Napoli con Genova, e da tutta que-

st' operazione si rileva che Tizio con ciò fa *rimessa* in Napoli per pagare il suo debito, e Sempronio fa *tratta* al di lui debitore, ricevendo l' importo del suo credito da Tizio, al quale l' ha ceduto. Dunque in sostanza il far tratta sopra una piazza estera è lo stesso che vendere la moneta di quella piazza, ed il far rimessa è viceversa la compra della moneta istessa.

Come delle due piazze una dà il fisso, e l' altra il variabile; nella piazza in cui si fa il cambio, talora si compra e si vende il variabile perfisso. Tra Genova e Napoli: Napoli dà il *fisso* e Genova il variabile; dunque quando in Genova si fa il cambio di Napoli, si compra e si vende il *fisso* per variabile Tra *Genova* e *Parigi*, Genova dà il fisso, che è pezzo 1 da lire 5. e 15 e Parigi il variabile che sono circa 94 soldi di franco; perciò quando in Genova si cambia con Parigi, si vende e si compra il variabile per fisso. Se si ha da comprare col fisso il variabile, torna in conto che questo variabile sia piccolo, viceversa sarà di vantaggio che il variabile sia alto, quando si ha da vendere il fisso per variabile.

Per intender, come si deve, la natura, l' utilità lo scopo principale de' cambi, è necessario prima conoscere minutamente, ed avere a memoria la corrispondenza dei variabili coi fissi di tutti i cambi di ogni piazza rispettiva, segnati nel listino settimanale, e la divisione delle monete, che corrono in tutte le piazze. Secondamente essere informato della giusta moderna corrispondenza di tutti i cambi parziali, comparati tra l' una, e l' altra piazza estera per l' intelligenza dei listini, che si ricevono da tutti i corrispondenti, e per guida costante in tutte le operazioni bancarie, che si dovesse fare per altrui, a proprio conto. Il che si potrà meglio attingere dalle tavole dimostrative di tutti i cambi applicati ad una piazza qualunque, ec.

Dietro tutte queste spiegazioni potrà il principiante non solo acquistare sopra le indicate tavole quelle cognizioni, che formano la parte più essenziale della banca pratica, ma servirsene eziandio di guida nel commercio dedicandovisi.

Ragguagli di Banca

§. 315. Il ragguaglio è quella sorta di calcolo, che serve di norma all' accorto Banchiere, il quale immaginando e

regolando le sue speculazioni a seconda della variazione de' cambi, prodotta dalla politica mercantile, e indicata settimanalmente dai listini de' cambi, è in istato di conoscere se convenga più rimettere, o trarre ad una piazza direttamente, o passare per un' altra indiretta. I lumi, che richiedonsi nell' abile speculator di Banca sono molti, per cui non posso tutti accennare. La tavola contenente la reciproca corrispondenza delle principali piazze cambianti in fine posta, somministra, in parte le cognizioni necessarie; e ciò che fosse omesso e necessario, si potrà apprender da coloro, che sanno, e che la carriera del magistero esercitano, non che dagli autori, che trattato hanno tale materia.

Non ostante per dare la giusta proporzione ai termini nell' operare qualsisiasi ragguaglio, si abbia presente di collocare per ultimo termine il *fisso*, che vuolsi valutare cioè quello, di cui il Banchiere deve servirsi, per *trarre* o *rimettere*, il primo della medesima specie, per secondo il conseguente del primo, il terzo omogeneo e della natura del secondo, il quarto corrispondente al terzo, e così seguitare l' ordinata distribuzione prescritta dalla regola *composta* o *multeplice* di cui servesi nei ragguagli di Banca, ed in tutto ciò che porta seco speculativa commerciale, come rilevasi dalla soluzione del quesito quì sotto posto, eseguito con detta regola.

Fatta la regola, se il quoto risulta maggiore del cambio assegnato alla *Piazza*, e sia il *fisso* di quella da cui si trae, o si rimette, sarà vantaggioso per rimettere, e dannoso per trarre; se il *fisso* sia dell' altra piazza, sarà vantaggioso per trarre, e dannoso per rimettere; ma se risultasse il quoto minore del cambio assegnato alla *piazza*, e fosse il *fisso* di quella, da cui si trae o si rimette, sarà vantaggioso per *trarre*, e dannoso per *rimettere*; e se fosse il fisso dell' altra piazza, vantaggioso per *rimettere*, e dannoso per *trarre*.

Si dimanda a quanto verrà il cambio tra Genova e Parigi, rimettendo a questa ultima piazza della lettera sopra Amborgo comprata in Genova a $46\frac{1}{5}$ e negoziato in Parigi a $186\frac{1}{2}$

Distribuiscasi i termini secondo la regola data, ma in due colonne, come vedesi nell' esemplo sottoposto.

Si moltiplichi poi uno per l'altro quelli della parte dritta, il di cui prodotto formerà il dividendo, indi fatto lo stesso di quelli della sinistra, il prodotto darà il divisore, ed eseguita l'operazione si avrà il quoto come rilevasi.

Soluzione

Sold. $146\frac{1}{5}$ di Genova sono in Amburgo mar. 1.

Mar. 100 corrispondono in Parigi a Franc. $186\frac{1}{2}$

Fran. 1 equivale a . . . . Sol. 20

Il valore di una piastra in Genova . . sol. 115. a quanto?

Quoto 92. 84.———— *cambio diretto* — $93\frac{1}{2}$

Come già si osservò, Parigi dà il variabile a Genova, perciò quando da Parigi si dovrà rimettere a Genova devesi servire della piazza, che fisserà il cambio più basso, perchè allora si darà meno soldi per una piastra, che si riceverà, per l'avverso, allorchè da Parigi devesi trarre sopra Genova, dovrassi passare per quella piazza, che stabilirà il cambio più alto, perchè allora si avranno più soldi in prezzo della piastra, che si farà pagare in Genova.

Quesito

Un mercante di Napoli dovendo ad un mercante di Lecce duc. 972 per tabacco inviatogli, e volendogli mandare questa somma un banchiere gli offre una cambiale della somma dovuta sopra Lecce mediante il cambio di $\frac{7}{8}$ per 100, qual somma si dovrà pagare al banchiere?

$$\begin{array}{l l}
\text{Duc.} & 972 \\
x & \frac{7}{8} \\
\hline
\frac{4}{8} & 486. \\
\frac{2}{8} & 243. \\
\frac{1}{8} & 121.\ \frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}$$

duc. 8. 50. $\frac{1}{2}$ cambio.

dunque duc. 972. + 8. 50. $\frac{1}{2}$ = duc. 980. 50. $\frac{1}{2}$ che tanto si deve pagare al banchiere.

Commissione, *Provvisione*, *Senseria*.

§. 316. *Commissionato* chiamasi colui, che compra e vende delle mercanzie o fa altri affari mediante un salario convenuto, che si chiama *provvisione*.

§. 317. *Sensale* è quegli, che s' intromette fra i contraenti per la conclusione di un negozio, e particolarmente tra il venditore e 'l compratore mediante uno stipendio, che dicesi *senseria*.

§. 318. *Procuratore*, *Agente* sono quelli incaricati dei beni o degli affari di un signore, mediante un emolumento chiamato *dritto*.

§. 319. Tutti i *dritti* sopraccennati son regolati secondo la natura degli affari, e si computano ordinariamente a tanto per 100.

Quesito.

A quanto ascende la commissione per la compra di temola

4794. grano Siciliano al 2 per 100., essendo stato comprato il grano a carlini 30 il tomolo?

Tomola 4794
$\times$ 30

Carl. 143,820.

Sopra la qual somma si deve prendere la commissione del 2 per 100. perciò $100 : 2 :: 143820 : x = 2876\frac{40}{100}$ o sia duc. 287. 6. $\frac{40}{100}$

TAVOLA DI CORRISPONDENZA

Fra Napoli e le principali Città di Europa.

Napoli Ducato 1.	di Genova soldi 103.
	di Parigi centes. 416
	di Marsiglia soldi 84.
	di Milano soldi 109.
	di Londra Den. ster. 44.
	di Venezia soldi 86.
	di Torino soldi 73.
	di Lisbona Reis 695.
Ducati 110.	di Livorno Pezzi 100.
Ducati 112.	di Firenze Pezzi 100 a 5. 15.
Ducati 117.	di Palermo scudi 100.
Ducati 124.	di Roma scudi 100.
Grana 44.	di Amborgo marco 1.
Grana 54 circa	di Zurigo fiorini 1.
Grana 60.	di Trieste, e di Vienna fiorini 1.
Grana 83.	di Spagna Piastre 1. 272. m.

Colla regola di tre semplice si troverà per mezzo della tavola di comparazione il valore di qualunque somma, p. e: se un ducato Napoletano vale di Genova soldi 103. ducati Napoletani 15 quanti soldi?

E viceversa: se soldi 103 valgono ducato 1. di Napoli Soldi *tot* quanti ducati?

E questa regola serve nelle tratte, e rimesse dirette, cioè da una piazza all'altra.

Se poi si voglia fare tratta o rimessa passando per un'altra piazza, o sia indirettamente, si deve prima conoscere il cambio di quella piazza per cui si vuol far passare o la tratta o la rimessa, affine di sapere se torni in conto, del che si parlò al §. 315.

PRESIDENZA

PER LA GIUNTA PER LA PUBBLICA ISTRUZIONE.

Vista la dimanda de' fratelli Raimondi con la quale chieggono di voler stampare il libro intitolato — *Trattato di Aritmetica di Luigi Pozzi professore di Matematica ec.*

Visto il favorevole parere del Regio Revisore Signor D. Carlo Baccaro ;

Si permette, che l' indicato Libro si stampi, però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuta nel confronto uniforme la impressione all' originale approvato.

Il Presidente
M. Golangelo.

Il Segretario della Giunta
Gaspare Selvaggi.